$\boxed{18}$ ［千葉大］

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にするθを求めよ。

$\boxed{19}$ ［九州大・文］

鋭角三角形 △ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする。このとき，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$，$\mathrm{OE}=R\cos A$ を証明せよ。

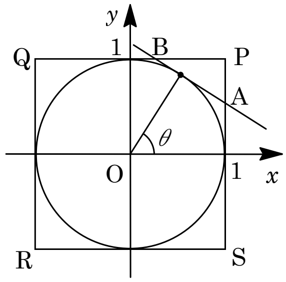
(2) G と O が一致するならば，△ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，$\mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$，$\tan B\tan C=3$ を証明せよ。

18　　　　［千葉大］

原点を中心とする半径 1 の円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線の方程式は，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$



直線 $x=1$ と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$ とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ となることを用いて，

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $1<t\leqq\sqrt{2}$ となり，$(*)$から，

$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

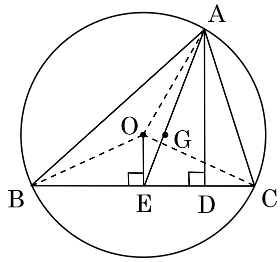
よって，S が最大となるのは，$t=\sqrt{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときである。

［解　説］

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

© 電送数学舎 2014

$\boxed{19}$　　［九州大・文］



(1)　$\triangle$ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\mathrm{AB}=2R\sin C,\ \mathrm{BC}=2R\sin A,\ \mathrm{CA}=2R\sin B$$

ここで，$\triangle$ABC の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C\cdots\cdots\cdots①$$

A から辺 BC に下ろした垂線が AD より，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AD}\cdot R\sin A\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\mathrm{AD}\cdot R\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C$，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$

また，O から辺 BC に下ろした垂線が OE で，$\angle\mathrm{BOE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=\frac{1}{2}\cdot2\angle\mathrm{A}=A$

よって，$\mathrm{OE}=R\cos\angle\mathrm{BOE}=R\cos A$

(2)　直線 AG と辺 BC は BC の中点，すなわち点 E で交わり，G と O が一致するならば，$\mathrm{GE}\perp\mathrm{BC}$ すなわち $\mathrm{AE}\perp\mathrm{BC}$ となる。これより $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である。

同様に考えると，$\mathrm{BG}\perp\mathrm{AC}$ となり，$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となり，$\triangle$ABC は正三角形である。

(3)　OG が BC と平行であるとき，$\triangle\mathrm{OGE}\backsim\triangle\mathrm{DEA}$ となり，$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=\mathrm{GE}:\mathrm{EA}$

ここで，点 G は$\triangle$ABC の重心より，$\mathrm{GE}:\mathrm{EA}=1:3$ となり，

$$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=1:3,\ \mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$$

(1)の結果から，$2R\sin B\sin C=3R\cos A$，$2\sin B\sin C=-3\cos(B+C)$ となり，

$$2\sin B\sin C=-3(\cos B\cos C-\sin B\sin C),\ 3\cos B\cos C=\sin B\sin C$$

よって，$\tan B\tan C=\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}=3$ となる。

［解　説］

図形の計量についての標準的な問題です。誘導に従えば，一見，難しそうな(3)の関係式が証明できます。

© 電送数学舎 2014