41　　［岡山大・理］

n を 3 以上の整数とし，a，b，c は 1 以上 n 以下の整数とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(2)　$a \leqq b \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(3)　$a<b$ かつ $a \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

42　　　　［神戸大・理］

n を自然数とする。1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ，よくかき混ぜて n 枚を取り出し，取り出した n 枚のカードの数字の合計を A，残された n 枚のカードの数字の合計を B とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　n が奇数のとき，A と B が等しくないことを示せ。

(2)　n が偶数のとき，A と B の差は偶数であることを示せ。

(3)　$n=4$ のとき，A と B が等しい確率を求めよ。

$\boxed{43}$ ［東北大］

1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。

$\boxed{44}$ ［大阪大・理］

さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2，3，4 のいずれかである確率を q_n とする。

(1)　p_n+q_n を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3)　$r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ。

45　　　　［一橋大］

数直線上の点 P を次の規則で移動させる。1 枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$ だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる。P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする。

(1)　$a_3=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$a_4=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を n を用いて表せ。

46　　［名古屋大・文］

大小合わせて 2 個のサイコロがある。サイコロを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。

(1)　2 個のサイコロを同時に投げる。出た目の差の絶対値について，その期待値を求めよ。

(2)　2 個のサイコロを同時に投げ，出た目が異なるときはそこで終了する。出た目が同じときには小さいサイコロをもう一度だけ投げて終了する。終了時に出ている目の差の絶対値について，その期待値を求めよ。

47　　［九州大］

A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1)　A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2)　ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

41　　　　［岡山大・理］

(1)　$1 \leqq a < b < c \leqq n$ を満たす $a,\ b,\ c$ の組は,

$${}_n\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\ \text{（通り）}$$

(2)　$a'=a$，$b'=b+1$，$c'=c+2$ とおくとき，$1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq n$ を満たす $a,\ b,\ c$ の組の数は，$1 \leqq a' < b' < c' \leqq n+2$ を満たす a'，b'，c' の組の数に等しいので,

$${}_{n+2}\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n\ \text{（通り）}$$

(3)　$a < b$ かつ $a \leqq c$ となる場合の数は，次の通りである。

(i)　$1 \leqq a < b < c \leqq n$ のとき　(1)より，$\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$（通り）

(ii)　$1 \leqq a < b = c \leqq n$ のとき　${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}n(n-1)$（通り）

(iii)　$1 \leqq a < c < b \leqq n$ のとき　(i)と同様に，$\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$（通り）

(iv)　$1 \leqq a = c < b \leqq n$ のとき　(ii)と同様に，$\dfrac{1}{2}n(n-1)$（通り）

(i)〜(iv)より，求める場合の数は,

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\times 2+\frac{1}{2}n(n-1)\times 2=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)\ \text{（通り）}$$

［解　説］

場合の数の典型問題です。(3)は(1)を利用して場合分けをしました。

$\boxed{42}$ ［神戸大・理］

(1) 1から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードの数字の和は,

$$A+B=1+2+\cdots+2n=\frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)=n(2n+1)\cdots\cdots\cdots①$$

さて, n が奇数のとき, $A=B$ とすると, ①より $2A=n(2n+1)\cdots\cdots\cdots②$

②の左辺は偶数, 右辺は奇数より成立しない。よって, A と B は等しくない。

(2) n が偶数のとき, $A-B=k$ とおくと, ①より,

$$2A=n(2n+1)+k,\ \ k=-n(2n+1)+2A$$

すると, $n(2n+1)$, $2A$ はともに偶数なので, A と B の差 k は偶数である。

(3) まず, $n=4$ のとき, 1から8までの番号をつけた8枚のカードから4枚を取り出す場合の数は, ${}_8\mathrm{C}_4=70$ である。

さて, ①より $A+B=4\times 9=36$ なので, $A=B$ となるのは $A=18$ のときであり, 取り出す4枚のカードの数字を $p, q, r, s\,(1\leqq p<q<r<s\leqq 8)$ とおくと,

$$p+q+r+s=18\cdots\cdots\cdots③$$

すると, $18<s+s+s+s=4s$ から $s>\dfrac{9}{2}$ となり, $s=5,\ 6,\ 7,\ 8$

(i) $s=5$ のとき　③より, $p+q+r=13\ (1\leqq p<q<r\leqq 4)$

このとき, 満たす $(p,\ q,\ r)$ は存在しない。

(ii) $s=6$ のとき　③より, $p+q+r=12\ (1\leqq p<q<r\leqq 5)$

このとき, $(p,\ q,\ r)=(3,\ 4,\ 5)$

(iii) $s=7$ のとき　③より, $p+q+r=11\ (1\leqq p<q<r\leqq 6)$

このとき, $(p,\ q,\ r)=(1,\ 4,\ 6),\ (2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 5)$

(iv) $s=8$ のとき　③より, $p+q+r=10\ (1\leqq p<q<r\leqq 7)$

このとき, $(p,\ q,\ r)=(1,\ 2,\ 7),\ (1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 5)$

(i)～(iv)より, 求める場合は $1+3+4=8$ 通りとなり, その確率は $\dfrac{8}{70}=\dfrac{4}{35}$ である。

［解 説］

場合の数と確率の基本問題です。(1)と(2)は, $A+B$ を考えるのがポイントです。(3)は, 場合分けをして丁寧に数え上げましたが, いきなり網羅していってもよいでしょう。

$\boxed{43}$ ［東北大］

(1)　10 個の玉から 2 個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは，$10=2\times5$ より，${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{4}{45}$ である。

(2)　10 個の玉から 4 個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_4=210$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは，$100=2^2\times5^2$ より，次の 2 つの場合がある。

(i)　4 つの数字が $(2,\ 2,\ 5,\ 5)$ の場合　1 通り

(ii)　4 つの数字が $(1,\ 4,\ 5,\ 5)$ の場合　${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$ 通り

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1+4}{210}=\dfrac{1}{42}$ である。

(3)　10 個の玉から 6 個を順に取り出す ${}_{10}\mathrm{P}_6$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，1 個目から 3 個目，4 個目から 6 個目に書かれている数字の組合せを，それぞれ A, B とすると，A の 3 つの数字の積と B の 3 つの数字の積が等しい場合は，

(i)　$A=B$ のとき

数字の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3$ 通り，A, B への数字の振り分けが 2^3 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，${}_5\mathrm{C}_3\times2^3\times3!\times3!=5\times2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(ii)　$A=(2,\ 2,\ 3)$, $B=(1,\ 4,\ 3)$，または $A=(1,\ 4,\ 3)$, $B=(2,\ 2,\ 3)$ のとき

A, B への数字の振り分けが $2\times2^2=2^3$ 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，$(2^3\times3!\times3!)\times2=2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(iii)　$A=(2,\ 2,\ 5)$, $B=(1,\ 4,\ 5)$，または $A=(1,\ 4,\ 5)$, $B=(2,\ 2,\ 5)$ のとき

(ii)と同様に，$(2^3\times3!\times3!)\times2=2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(i)～(iii)より，求める確率は，

$$\frac{(5+1+1)\times2^4\times(3!)^2}{{}_{10}\mathrm{P}_6}=\frac{7\times2^4\times(3!)^2}{10\times9\times8\times7\times6\times5}=\frac{2}{75}$$

［解　説］

$2\times2=1\times4$ に注目するために(2)の設問があり，それが(3)へとつながっています。注意深さの要求される問題です。

$\boxed{44}$　　［大阪大・理］

(1)　$T_n = X_1X_2\cdots X_n$ とするとき，T_n が 5 で割り切れないのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_n のいずれも 5 以外の場合である。

条件より，T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n，余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とするとき，$p_n + q_n$ は T_n が 5 で割り切れない確率になるので，

$$p_n + q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　T_{n+1} を 5 で割った余りが 1 となる場合は，次の通りである。

(i)　T_n を 5 で割った余りが 1 のとき

X_{n+1} が 1 または 6 であるときで，その確率は $\dfrac{1}{3}$ である。

(ii)　T_n を 5 で割った余りが, 2, 3, 4 のいずれかであるとき

X_{n+1} がそれぞれ 3, 2, 4 ときで，その確率はいずれも $\dfrac{1}{6}$ である。

(iii)　T_n を 5 で割った余りが 0 のとき

どんな X_{n+1} に対しても T_{n+1} を 5 で割った余りは 0 となり，成立しない。

(i)〜(iii)に，①を適用して，

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - p_n\right\} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n \cdots\cdots\cdots ②$$

(3)　$r_n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおくと，$p_1 = \dfrac{1}{3}$ より $r_1 = \dfrac{6}{5}p_1 = \dfrac{2}{5}$ となり，②から，

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1} p_{n+1} = \frac{1}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n + \frac{1}{5},\quad r_{n+1} = \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}$$

これより，$r_{n+1} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}\left(r_n - \dfrac{1}{4}\right)$ となり，

$$r_n - \frac{1}{4} = \left(r_1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

よって，$r_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$，$p_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n r_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

［解　説］

確率と漸化式についての標準的な問題です。(3)で誘導が付いていたのは意外でしたが。

$\boxed{45}$ ［一橋大］

(1) 1 枚の硬貨を投げて表，裏が出る確率は，それぞれ$\dfrac{1}{2}$ずつとする。

$a_3 = 0$ となるのは，表→裏→表または裏→裏→裏のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 = \frac{1}{4}$$

(2) $a_4 = 1$ となるのは，次の 2 つの場合がある。

(i) $a_3 = 0$ で 4 回目に表が出る場合

この場合の確率は，(1)より，$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ となる。

(ii) $a_3 = -1$ で 4 回目に裏が出る場合

$a_3 = -1$ となるのは裏→表→裏のときだけであり，これよりこの場合の確率は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{16}$ となる。

(i)(ii)より，$a_4 = 1$ となる確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{16}$ である。

(3) $a_n = n-3\ (n\geqq 3)$ となるのは，次の 2 つの場合があり，その確率 p_n について，

(i) $a_{n-1} = n-4$ で n 回目に表が出る場合

この場合の確率は，$p_{n-1}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}p_{n-1}$ となる。

(ii) $a_{n-1} = -n+3$ で n 回目に裏が出る場合

まず，$-n+3\leqq a_{n-2}\leqq n-2$ なので，$a_{n-1} = -n+3$ となるのは，$a_{n-2} = n-3$ で $n-1$ 回目に裏が出る場合だけ，すなわち裏→表→表→…→表→裏と 1 回目と $n-1$ 回目に裏が出て，それ以外は表が出る場合である。

n 回目は裏が出ることより，この場合の確率は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ となる。

(i)(ii)より，$p_n = \dfrac{1}{2}p_{n-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\quad(n\geqq 4)$ ………($*$)

すると，($*$)より，$2^n p_n = 2^{n-1}p_{n-1}+1$ となり，$p_3 = \dfrac{1}{4}$ から，

$$2^n p_n = 2^3 p_3 + (n-3) = 8\cdot\frac{1}{4}+n-3 = n-1$$

よって，$p_n = \dfrac{n-1}{2^n}\quad(n\geqq 3)$ である。

［解 説］

(1)と(2)が, (3)の漸化式を立式するための誘導となっています。特に, (ii)の場合に注意深さが要求されます。解答例では省きましたが，$a_5 = 2$ のときも考えて，一般化しています。

46　　［名古屋大・文］

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

(1)　2 個のサイコロを同時に投げたとき，出た目の差の絶対値についてまとめると，右表のようになる。

この期待値を E_1 とすると，

$$E_1=0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}=\frac{35}{18}$$

(2)　2 個のサイコロを同時に投げたとき，出た目の差の絶対値が 0 以外のときは終了し，(1)と同様に期待値を計算する。

また，出た目の差の絶対値が 0 のときはもう一度だけ投げて終了し，新たに出た目との差の絶対値を考える。この場合，(1)と同様に考えると，期待値は $\frac{1}{6}E_1$ となる。

よって，終了時の出た目の差の絶対値の期待値を E_2 とすると

$$E_2=\left(E_1-0\times\frac{6}{36}\right)+\frac{1}{6}E_1=\frac{7}{6}\cdot\frac{35}{18}=\frac{245}{108}$$

［解　説］

(1)の結果がうまく利用できるように，(2)が構成されています。同じことを繰り返してもよいのですが。

47　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　A さんが 5 円硬貨を 3 枚投げたとき，表 3 枚の場合(合計金額 15 円)，表 2 枚で裏 1 枚の場合(合計金額 10 円)，表 1 枚で裏 2 枚の場合(合計金額 5 円)，裏 3 枚の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$，${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ である。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15 円	10 円	5 円	0 円
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

B さんが 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚を投げたとき，2 枚とも表の場合(合計金額 5 円)，10 円表で 5 円裏の場合(合計金額 10 円)，10 円裏で 5 円表の場合(合計金額 5 円)，2 枚とも裏の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ずつである。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15 円	10 円	5 円	0 円
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

以上より，A さんが B さんに勝つ確率 p，引き分けとなる確率 q は，

$$p=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$q=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(2)　ゲーム終了後，A さんの所持金とその各々の場合の確率は以下のようになる。

(i)　B さんの合計金額が 0 円で A さんが勝った場合（所持金 30 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{32}$$

(ii)　B さんの合計金額が 5 円で A さんが勝った場合（所持金 25 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

(iii) B さんの合計金額が 10 円で A さんが勝った場合（所持金 20 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

(iv)　引き分けの場合（所持金 15 円）で，確率は，(1)より $q=\frac{1}{4}$

(v)　A さんの合計金額が 10 円で A さんが負けた場合（所持金 10 円）

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

(vi)　A さんの合計金額が 5 円で A さんが負けた場合（所持金 5 円）

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

(vii) A さんの合計金額が 0 円で A さんが負けた場合（所持金 0 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

(i)～(vii)より，ゲーム終了後の A さん所持金の期待値 E は,

$$E=0\times\frac{3}{32}+5\times\frac{3}{16}+10\times\frac{3}{32}+15\times\frac{1}{4}+20\times\frac{1}{32}+25\times\frac{1}{8}+30\times\frac{7}{32}=\frac{255}{16}$$

［解　説］

内容的にはセンターレベルですが，集中力がかなり要求される確率の問題です。また，(2)では，題意を取り違えないように注意しなくてはいけません。