51　　［神戸大］

$m, n\,(m<n)$ を自然数とし，$a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$ とおく。3 辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a^2+b^2=c^2$ を示せ。

(2)　r を m, n を用いて表せ。

(3)　r が素数のときに，S を r を用いて表せ。

(4)　r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ。

52　［九州大］

次の問いに答えよ。

(1)　任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2)　自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると, a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

$\boxed{53}$ ［一橋大］

$a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

$\boxed{54}$　　［京都大・理］

　自然数 a, b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる。このような a, b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ。

$\boxed{55}$　［金沢大・理］

自然数が 1 つずつ書かれている玉が,

① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④ ① ② ③ ④ ⑤ ① ② ……

のように 1 列に並べられている。次の問いに答えよ。

(1) 数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か。

(2) 自然数 n に対し，$2n^2$ 番目の玉に書かれている数は何か。

(3) 1 番目から $2n^2$ 番目までの玉をすべて袋に入れた。この袋から 2 つの玉を取り出すとき，同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ。

$\boxed{56}$　［東京大・理］

r を 0 以上の整数とし，数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1 = r,\ a_2 = r+1,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0,\ b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4)　a_2，a_3，a_4，…に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。

51　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

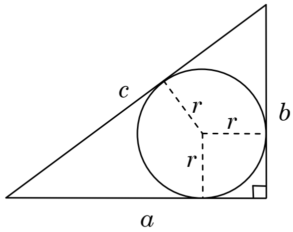
(1)　$a^2+b^2=(n^2-m^2)^2+(2mn)^2=n^4+2m^2n^2+m^4=(n^2+m^2)^2=c^2$

(2)　(1)より, 3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ の三角形は, 斜辺の長さが c の直角三角形なので, 内接円の半径を r とすると,

$$(a-r)+(b-r)=c$$

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}(n^2-m^2+2mn-n^2-m^2)$$

$$=mn-m^2=m(n-m)\cdots\cdots\cdots(*)$$



(3)　まず, 三角形の面積 S は, $S=\dfrac{1}{2}ab=mn(n^2-m^2)$

r が素数のとき, $(*)$より, $(m,\ n-m)=(1,\ r)$, $(r,\ 1)$

(i)　$(m,\ n-m)=(1,\ r)$ のとき　$n-1=r$ から, $n=r+1$

$$S=1\cdot(r+1)\{(r+1)^2-1\}=r(r+1)(r+2)$$

(ii)　$(m,\ n-m)=(r,\ 1)$ のとき　$n-r=1$ から, $n=r+1$

$$S=r(r+1)\{(r+1)^2-r^2\}=r(r+1)(2r+1)$$

(4)　(i)　$S=r(r+1)(r+2)$ のとき

S は連続する 3 つの自然数の積なので, 6 の倍数である。

(ii)　$S=r(r+1)(2r+1)$ のとき

$$S=r(r+1)(r-1+r+2)=(r-1)r(r+1)+r(r+1)(r+2)$$

S は連続する 3 つの自然数の積の和なので, 6 の倍数である。

(i)(ii)より, いずれの場合も, S は 6 で割り切れる。

［解 説］

直角三角形の内接円を題材にした頻出問題です。(4)の(ii)は式変形で示しましたが, 普通に, 3 で割った余りに着目して場合分けをする方法でも簡単に示せます。

52　　［九州大］

(1)　まず，自然数 a に対し，a が 3 の倍数のとき a^2 も 3 の倍数である。

また，a が 3 の倍数でないとき，$a=3k\pm1$（k は整数）とおくと，

$$a^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$$

すると，a^2 を 3 で割った余りは 1 となる。

よって，a と a^2 について 3 で割った余りを対応させると，右表のようになり，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

a	0	1	2
a^2	0	1	1

(2)　a^2，b^2 に対し，a^2+b^2 を 3 で割った余りをまとめると，右表のようになる。

a^2 ＼ b^2	0	1
0	0	1
1	1	2

さて，$a^2+b^2=3c^2$ のとき，$3c^2$ が 3 の倍数より，a^2+b^2 も 3 の倍数である。すると，a^2，b^2 はともに 3 の倍数となり，さらに(1)より，$a,\ b$ はともに 3 の倍数である。

よって，a_1，b_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$ とおくと，

$$9{a_1}^2+9{b_1}^2=3c^2,\ \ 3{a_1}^2+3{b_1}^2=c^2$$

これより，c^2 は 3 の倍数となり，(1)より，c は 3 の倍数である。

以上より，$a^2+b^2=3c^2$ のとき $a,\ b,\ c$ はすべて 3 で割り切れなければならない。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ が存在すると仮定したとき，(2)より，a_1，b_1，c_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$，$c=3c_1$ とおくと，

$$9{a_1}^2+9{b_1}^2=3\cdot9{c_1}^2,\ \ {a_1}^2+{b_1}^2=3{c_1}^2$$

すると，(2)から，a_2，b_2，c_2 を自然数として，$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_1=3c_2$ とおくことができ，

$$9{a_2}^2+9{b_2}^2=3\cdot9{c_2}^2,\ \ {a_2}^2+{b_2}^2=3{c_2}^2$$

以下，同様に，$a_n=3a_{n+1}$，$b_n=3b_{n+1}$，$c_n=3c_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくと，

$$a>a_1>a_2>\cdots>0,\ \ b>b_1>b_2>\cdots>0,\ \ c>c_1>c_2>\cdots>0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，単調に減少する自然数の列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が存在することになり，明らかに不適である。

よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ は存在しない。

［解　説］

ときどき見かける整数問題です。(1)と(2)は，メインの(3)の誘導となっています。要演習の 1 題です。

53　　［一橋大］

素数 a, b, c に対して，条件より，p, q を素数とすると，

$$a-b-8=p \cdots\cdots\cdots ①,\ \ b-c-8=q \cdots\cdots\cdots ②$$

①より $a-b=p+8>0$，②より $b-c=q+8>0$ となり，$a>b>c$ である。

(i)　$c\neq 2$ のとき

素数 a, b, c はすべて奇数となるので，①②より素数 p, q はともに偶数，すなわち $p=q=2$ である。すると，①②より，

$$a-b=10 \cdots\cdots\cdots ③,\ \ b-c=10 \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$a=c+20=c+3\times 6+2$，$b=c+10=c+3\times 3+1$ となり，すなわち a, b, c を 3 で割った余りはすべて異なり，素数 a, b, c のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$c=3$，$b=13$，$a=23$

(ii)　$c=2$ のとき

素数 $a,\ b$ はともに奇数となるので，①より素数 p は偶数，すなわち $p=2$ である。また，②より素数 q は奇数である。すると，①②より，

$$a-b=10 \cdots\cdots\cdots ⑤,\ \ b-10=q \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤⑥より，$a=q+20$，$b=q+10$ となり，$a>b>q$ である。そして，(i)と同様にすると，素数 a, b, q のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$q=3$，$b=13$，$a=23$

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 3)$，$(23,\ 13,\ 2)$

［解　説］

整数問題でよく利用される「素数で偶数なのは 2 だけ」ということが，最初のポイントです。なお，解答例では省きましたが，③④を導いたあと実験をして，3 で割った余りに着目をしました。

$\boxed{54}$ ［京都大・理］

まず，自然数 $a,\ b$ がどちらも 3 で割り切れないとき，$a,\ b$ を 3 で割った余りと，a^3+b^3 を 3 で割った余りとの関係は，右表のようになる。

$a \backslash b$	1	2
1	2	0
2	0	1

すると，a^3+b^3 が 81 で割り切れるためには，3 で割った余りについて，a, b の一方が 1，他方が 2 であることが必要となる。

そこで，$a,\ b$ に関する対称性より，$a=3k+1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，$b=3l-1\ (l=1,\ 2,\ \cdots)$ の場合を考えると，

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ &= (3k+1+3l-1)\{(3k+1)^2-(3k+1)(3l-1)+(3l-1)^2\} \\ &= 9(k+l)\{3(k^2-kl+l^2+k-l)+1\} \end{aligned}$$

これより，a^3+b^3 が 81 で割り切れる条件は，$3(k^2-kl+l^2+k-l)+1$ が 3 の倍数でないことより，$k+l$ が 9 の倍数となることである。すなわち，$k\geqq 0$，$l\geqq 1$ から $k+l\geqq 1$ となり，$k+l=9,\ 18,\ 27,\ \cdots$ である。

(i)　$k+l=9$ のとき

この場合をまとめると，右表のようになり，$(a,\ b)$ の組で a^2+b^2 の値が最小になるのは，$a+b=3\times 9=27$ から，

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
l	9	8	7	6	5	4	3	2	1
a	1	4	7	10	13	16	19	22	25
b	26	23	20	17	14	11	8	5	2

$$a^2+b^2=a^2+(27-a)^2=2a^2-54a+27^2=2\left(a-\frac{27}{2}\right)^2+\frac{27^2}{2}$$

よって，$(a,\ b)=(13,\ 14)$ のとき，a^2+b^2 は最小値 $13^2+14^2=365$ をとる。

(ii)　$k+l\geqq 18$ のとき

この場合は $a+b\geqq 3\times 18=54$ から，(i)と同様に考えると，a^2+b^2 の値が最小になるのは $a=b=27$ のときであるが，この値はともに 3 で割り切れるので，

$$a^2+b^2>27^2+27^2>365$$

(i)(ii)より，a^2+b^2 が最小となるのは，$(a,\ b)=(13,\ 14)$ のときである。

したがって，対称性を考え合わせると，$(a,\ b)=(13,\ 14)$，$(14,\ 13)$ において，a^2+b^2 は最小値 365 をとる。

［解　説］

試行錯誤が必要とされる京大らしい整数問題です。まず，3 で割った余りに注目して，絞り込みを行っています。ただ，後半は ab 平面をイメージした解答例のつもりですが，アバウトに記してしまいたいという誘惑に負けそうになっています。

$\boxed{55}$　　　　［金沢大・理］

(1)　与えられた玉の列を下記のようにグループ分けを行う。

①｜① ②｜① ② ③｜① ② ③ ④｜① ② ③ ④ ⑤｜① ② ……

左から，第 1 群，第 2 群，第 3 群，…とすると，第 k 群の右端までの個数は，

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

さて，この玉の列で，数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは，第 100 群の右端より，$\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 101=5050$ 番目となる。

(2)　$2n^2$ 番目の玉が，第 k 群に属するとすると，

$$\frac{1}{2}(k-1)k<2n^2\leqq\frac{1}{2}k(k+1)\,,\ (k-1)k<4n^2\leqq k(k+1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$k=2n$ のとき，$(k-1)k=4n^2-2n$，$k(k+1)=4n^2+2n$ から，$(*)$を満たす。よって，$2n^2$ 番目の玉は第 $2n$ 群に属する。

そこで，第 $2n-1$ 群の右端までの個数は，$\frac{1}{2}(2n-1)2n=n(2n-1)$ となり，$2n^2$ 番目の玉は，第 $2n$ 群の $2n^2-n(2n-1)=n$ 番目すなわち数 n が書かれている。

(3)　$2n^2$ 個の玉から 2 つを取り出す ${}_{2n^2}\mathrm{C}_2=n^2(2n^2-1)$ 通りが同様に確からしい。

(2)より，$2n^2$ 番目の玉は第 $2n$ 群の n 番目より，数 1 の玉は $2n$ 個，数 2 の玉は $2n-1$ 個，数 3 の玉は $2n-2$ 個，…，数 n の玉は $n+1$ 個ある。さらに，数 $n+1$ の玉は $n-1$ 個，数 $n+2$ の玉は $n-2$ 個，…，数 $2n-2$ の玉は 2 個，数 $2n-1$ の玉は 1 個ある。

すると，同じ数が書かれた玉を取り出す場合の数は，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
&{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+{}_{2n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2}\mathrm{C}_2\\
&=({}_{2}\mathrm{C}_2+{}_{3}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n}\mathrm{C}_2+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_2)-{}_{n}\mathrm{C}_2\\
&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2}k(k-1)-\frac{1}{2}n(n-1)\\
&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{2n}\{(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\}-\frac{1}{2}n(n-1)\\
&=\frac{1}{6}(2n+1)2n(2n-1)-\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{6}n(8n^2-3n+1)
\end{aligned}$$

よって，同じ数が書かれた玉を取り出す確率は，$\dfrac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}$ である。これは $n=1$ の場合も満たしている。

［解 説］

標準的な群数列の問題です。(3)はミスを犯しそうなので，具体的に記しました。

$\boxed{56}$ ［東京大・理］

(1)　b_n は a_n を素数 p で割った余りなので，商を q_n とすると $a_n = p\cdot q_n + b_n$ となり，

$$a_{n+1}(a_n+1) = (p\cdot q_{n+1} + b_{n+1})(p\cdot q_n + b_n + 1)$$
$$= p(p\cdot q_n q_{n+1} + q_{n+1}b_n + q_{n+1} + q_n b_{n+1}) + b_{n+1}(b_n+1)$$

すると，条件から，$a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)$ なので，a_{n+2} を p で割った余り b_{n+2} は，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する。

(2)　$r=2$，$p=17$ のとき，$a_1 = r = 2$ より $b_1 = 2$，$a_2 = r+1 = 3$ より $b_2 = 3$

以下，(1)の結論から，b_3 は $b_2(b_1+1) = 9$ を 17 で割った余りより $b_3 = 9$ である。

b_4 は $b_3(b_2+1) = 36$ を 17 で割った余りより $b_4 = 2$ である。

b_5 は $b_4(b_3+1) = 20$ を 17 で割った余りより $b_5 = 3$ である。

すると，$b_4 = b_1$，$b_5 = b_2$ から，帰納的に，$b_6 = b_3 = 9$，$b_7 = b_4 = 2$，$b_8 = b_5 = 3$，$b_9 = b_6 = 9$，$b_{10} = b_7 = 2$ となる。

(3)　まず，$b_{n+2} = b_{m+2}$ より，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りは，$b_{m+1}(b_m+1)$ を p で割った余りに等しい。すなわち，k を整数として，

$$b_{n+1}(b_n+1) - b_{m+1}(b_m+1) = pk$$

ここで，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$ より，$b_{n+1}(b_n+1) - b_{n+1}(b_m+1) = pk$

$$b_{n+1}(b_n - b_m) = pk$$

$0 < b_{n+1} < p$ より，b_{n+1} は p の倍数でないので，$b_n - b_m$ が p の倍数となる。

すると，$0 \leqq b_n < p$，$0 \leqq b_m < p$ から，$-p < b_n - b_m < p$ となり，$b_n - b_m = 0$ である。すなわち，$b_n = b_m$ が成り立つ。

(4)　a_2，a_3，a_4，…は，すべて p で割り切れないことより，

$$1 \leqq b_2 \leqq p-1,\ 1 \leqq b_3 \leqq p-1,\ 1 \leqq b_4 \leqq p-1,\ \cdots\cdots$$

すると，2 つの相異なる 2 以上の自然数 k，l に対して，$(b_k,\ b_l)$ の組の数は高々 $(p-1)^2$ 通りにすぎないので，これより，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$，$b_{n+2} = b_{m+2} > 0$ を満たす自然数 $n, m\ (n < m)$ が存在することになる。

(3)の結論を用いると $b_n = b_m > 0$ となり，帰納的に $b_1 = b_{m-n+1} > 0$，すなわち a_1 も p で割り切れない。

［解　説］

漸化式と整数の融合問題で，周期数列が現れます。(1)が後続の設問への誘導として利いています。なお，(3)までの文理共通題に，(4)として，鳩の巣原理を利用する設問が追加されています。