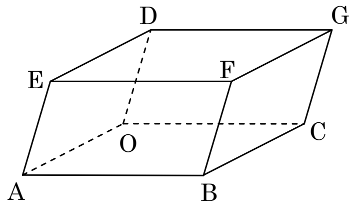
$\boxed{31}$ ［北海道大・文］

$\triangle$ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする。正の実数 p に対して，BC を$(p+1):p$に外分する点を D とし，線分 AD と $\triangle$ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。

32　　［東北大・理］



右図のような平行六面体 OABC - DEFG が xyz 空間内にあり，O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，C(0, 3, 0)，D$(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を $\mathrm{MN}=4$ かつ $\mathrm{DN}<\mathrm{GN}$ を満たすように定める。

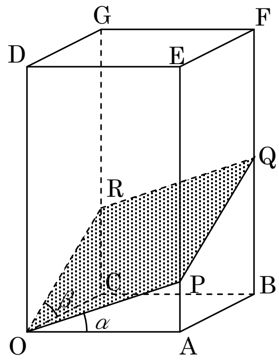
(1)　N の座標を求めよ。

(2)　3 点 E, M, N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。

(3)　3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 OABC - DEFG の切り口の面積を求めよ。

33　　［東京大・理］

1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle$AOP を α，$\angle$COR を β とおく。



(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

$\boxed{34}$ ［熊本大・医］

空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし, OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) $0<t<1$ に対し, BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また，PM＋MQ が最小になる OB 上の点を M とし，PN＋NQ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △QMN の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMN の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{35}$ ［東京医歯大］

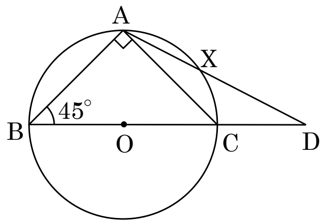
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，xyz 空間内の 4 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$ を頂点とする四面体の体積を $V(\theta)$，この四面体の xz 平面による切り口の面積を $S(\theta)$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$V\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ をそれぞれ求めよ。

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $V(\theta)$ の最大値を求めよ。

31　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］



(1)　条件より，$\mathrm{BC}:\mathrm{CD}=1:p$ から，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=p\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる。

また，点 O は辺 BC の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=(1+p)\overrightarrow{\mathrm{OC}}-p\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=(1+p)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

(2)　まず，$\mathrm{BC}=1$ としても一般性を失うことはない。

このとき，条件より，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{CD}=p$ となり，方べきの定理から，

$$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DX}=p(p+1)\cdots\cdots\cdots①$$

さらに，$\mathrm{DX}=k\mathrm{DA}$ とおくと，①より，$k\mathrm{DA}^2=p(p+1)\cdots\cdots\cdots②$

また，$\triangle\mathrm{ABD}$ に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{DA}^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(1+p)^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+p)\cos 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}+1+2p+p^2-(1+p)=\frac{1}{2}(2p^2+2p+1)\cdots\cdots\cdots③$$

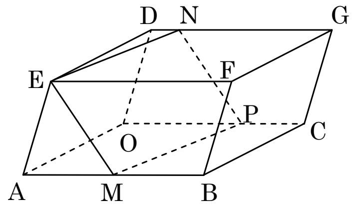
②③より，$k=\dfrac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}$ となり，$\mathrm{DX}:\mathrm{XA}=k:1-k$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left\{1-\frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\right\}(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2p+1}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

［解　説］

ベクトルの図形への応用問題です。点 O を原点とし，BC を x 軸，OA を y 軸として座標系を設定する方法も考えられます。確実ですが，計算量は多くなるでしょう。

32　　　　［東北大・理］



(1)　$0 \leqq t \leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (-1,\ 0,\ \sqrt{6}) + t(0,\ 3,\ 0) = (-1,\ 3t,\ \sqrt{6})$$

また，$\mathrm{M}\left(2,\ \frac{3}{2},\ 0\right)$ から，$\mathrm{MN} = 4$ より，

$$(-3)^2 + \left(3t - \frac{3}{2}\right)^2 + 6 = 4^2,\quad 9\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$\mathrm{DN} < \mathrm{GN}$ より $t < \frac{1}{2}$ となるので，$t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ から，$\mathrm{N}\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{6}\right)$ である。

(2)　$\mathrm{E}(1,\ 0,\ \sqrt{6})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{EM}} = \left(1,\ \frac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{EN}} = \left(-2,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ であり，点 P は y 軸上の点から $\mathrm{P}(0,\ p,\ 0)$ とおくと，r, s を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = r\overrightarrow{\mathrm{EM}} + s\overrightarrow{\mathrm{EN}}$ より，

$$(-1,\ p,\ -\sqrt{6}) = r\left(1,\ \frac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right) + s\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$-1 = r - 2s \cdots\cdots①,\quad p = \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}s \cdots\cdots②,\quad -\sqrt{6} = -\sqrt{6}r \cdots\cdots③$$

①③より $r = s = 1$ なので，②から $p = 2$ となり，$\mathrm{P}(0,\ 2,\ 0)$ である。

(3)　(2)より $\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \overrightarrow{\mathrm{EM}} + \overrightarrow{\mathrm{EN}}$ から，切り口は平行四辺形となり，その面積 S は，

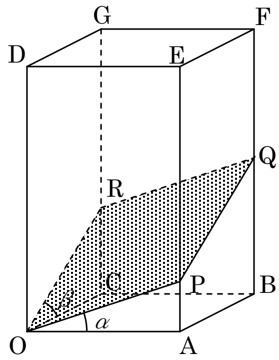
$$S = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{EN}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EN}})^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} + 6\right)\left(4 + \frac{1}{4}\right) - \left(-2 + \frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{629}{4^2} - \frac{25}{4^2}} = \frac{\sqrt{151}}{2}$$

［解　説］

空間ベクトルの基本問題です。(2)では平面のパラメータ表示を利用していますが，平行六面体の切り口ということに注目して，(2)と(3)を一気に処理するという方法も考えられます。

$\boxed{33}$ ［東京大・理］



(1) O を原点とし, OA, OC, OD をそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸の正の部分とすると，A$(1,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ 0)$となる。

条件より，$\mathrm{AP}=\tan\alpha$，$\mathrm{CR}=\tan\beta$ なので,

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ \tan\alpha),\ \mathrm{R}(0,\ 1,\ \tan\beta)$$

さて，OP // RQ，OR // PQ から, 四角形 OPQR は平行四辺形となり, その面積 S は,

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}$$
$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$
$$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$$

(2) 条件より，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\tan(\alpha+\beta)=1$ となり,

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1,\ \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta\cdots\cdots\cdots①$$

また，$S=\dfrac{7}{6}$ なので, (1)から，$1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{49}{36}$ となり,

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{36}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\{1-(\tan\alpha+\tan\beta)\}=\dfrac{13}{36}$ となり,

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2+2(\tan\alpha+\tan\beta)-\frac{85}{36}=0$$
$$\left(\tan\alpha+\tan\beta+\frac{17}{6}\right)\left(\tan\alpha+\tan\beta-\frac{5}{6}\right)=0$$

$\tan\alpha+\tan\beta>0$ より，$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}\cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\tan\alpha\tan\beta=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}\cdots\cdots\cdots④$

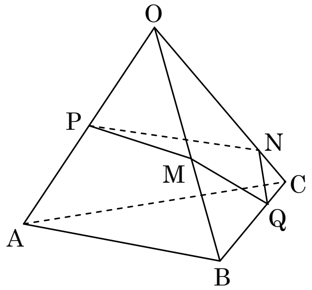
すると，③④から，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ は 2 次方程式 $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$ の 2 つの解となり，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=0$ から，$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}$ である。

さらに，$\alpha\leqq\beta$ から，$\tan\alpha\leqq\tan\beta$ なので，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。誘導が丁寧な構成となっています。なお, 図から「四角柱は直方体」として解いています。

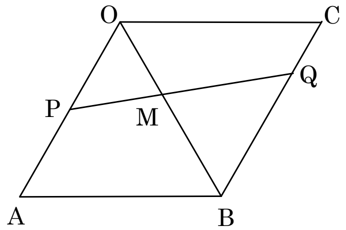
$\boxed{34}$　［熊本大・医］



(1) 折れ線の長さ $\mathrm{PM}+\mathrm{MQ}$ が最小になる OB 上の点 M は，右下図の正四面体 OABC の展開図において，辺 OB と PQ の交点である。

すると，$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=\frac{1}{2}:t=1:2t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2t+1}\vec{b}$$



また，$\mathrm{PN}+\mathrm{NQ}$ が最小となる OC 上の点 N に対して，同様に考えると，$\mathrm{ON}:\mathrm{NC}=\frac{1}{2}:1-t=1:2-2t$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{3-2t}\vec{c}$ である。

(2) まず，$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ から，

$$\triangle\mathrm{OMN}=\frac{1}{2t+1}\cdot\frac{1}{3-2t}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{BQM}=\frac{2t}{2t+1}\cdot\frac{t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{2t^2}{2t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{CQN}=\frac{2-2t}{3-2t}\cdot\frac{1-t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，$\triangle\mathrm{QMN}$ の面積を S とおくと，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}-\frac{2t^2}{2t+1}-\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{-4t^2+4t}{(2t+1)(3-2t)}=\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(2t+1)(3-2t)}$$

(3) (2)より，$S=\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{-4t^2+4t+3}=\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{4t(1-t)+3}$ となり，$u=t(1-t)=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ とおくと，$0<t<1$ から，$0<u\leqq\frac{1}{4}$ となり，

$$S=\frac{\sqrt{3}u}{4u+3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{3}{4u+3}\right)$$

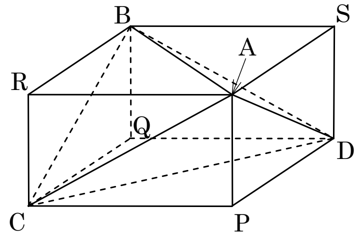
よって，$u=\frac{1}{4}\left(t=\frac{1}{2}\right)$ のとき，S は最大値 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{16}$ をとる。

［解 説］

(3)は，普通に微分法を利用するという方法もありますが，分母・分子の形に注目して置き換えをしています。

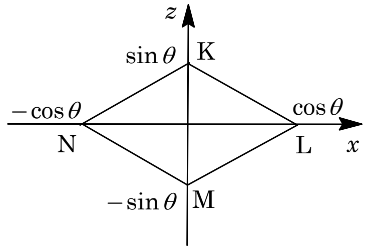
35　　［東京医歯大］

(1) 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対して，それぞれ xy 平面に関する対称な 4 つの点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{R}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{S}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ を定める。



すると，四面体 ABCD は，直方体 ARBS-PCQD に埋め込まれる。

ここで，四面体の辺 AB, AC, DC, DB と xz 平面との交点は，それぞれの辺の中点となり，これを K, L, M, N とおくと，$\mathrm{K}(0,\ 0,\ \sin\theta)$，$\mathrm{L}(\cos\theta,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{M}(0,\ 0,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{N}(-\cos\theta,\ 0,\ 0)$ である。



これより，四面体の xz 平面による切り口はひし形 KLMN となり，その面積 $S(\theta)$ は，

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot2\cos\theta\cdot2\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\sin2\theta\ \cdots\cdots\cdots ①$$

よって，$S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

次に，直方体 ARBS-PCQD の体積を $V_1(\theta)$ とおくと，

$$V_1(\theta)=(2\cos\theta)^2\cdot2\sin\theta=8\sin\theta\cos^2\theta$$

また，4 つの四面体 ABSD, ABRC, CDPA, CDQB は合同であり，その体積を $V_2(\theta)$ とおくと，

$$V_2(\theta)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\cdot2\sin\theta=\frac{4}{3}\sin\theta\cos^2\theta$$

これより，四面体 ABCD の体積 $V(\theta)$ は，

$$V(\theta)=V_1(\theta)-4V_2(\theta)=\left(8-\frac{16}{3}\right)\sin\theta\cos^2\theta=\frac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta\ \cdots\cdots\cdots ②$$

よって，$V\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{8}{3}\sin\dfrac{\pi}{6}\cos^2\dfrac{\pi}{6}=1$ である。

(2) ①より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値は，$S\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ である。

(3) ②より，$V(\theta)=\dfrac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta=\dfrac{8}{3}\sin\theta(1-\sin^2\theta)=\dfrac{8}{3}(\sin\theta-\sin^3\theta)$

ここで，$f(t)=t-t^3\ (0<t<1)$ とおくと，

$$f'(t)=1-3t^2$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	$\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$	↘	

よって，$V(\theta)$ は $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる α で，最大値 $V(\alpha)=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{2}{9}\sqrt{3}=\dfrac{16}{27}\sqrt{3}$ をとる。

［解 説］

解答例に記したように 4 点 P, Q, R, S を設定し，等面四面体は直方体に埋め込まれるという知識の利用がポイントとなります。同様な問題は，たとえば 1993 年の東大や 2006 年の東工大などで出題されていますが，これらの経験がなければ，解法の糸口を見つけるのが難しいと思えます。