34　［金沢大］

関数 $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ のグラフ C について，次の問いに答えよ。

(1)　C の変曲点のうち，x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた P の x 座標を b とするとき，$\tan\theta=e^b$ を満たす θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ。

(3)　上の b に対する直線 $x=b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{35}$　　　　［長崎大］

区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，関数$f(x)$と関数$g(x)$を

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos x,\quad g(x)=\cos\frac{x}{2}+c$$

と定義する。cは定数である。次の問いに答えよ。

(1)　区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，2 曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が$x=0$以外の点で接するように c の値を定め，接点$(p,\ q)$を求めよ。また，そのとき，区間$0 \leqq x \leqq \pi$における関数$f(x)$と関数$g(x)$の大小関係を調べよ。

(2)　定数 c と接点$(p,\ q)$は(1)で求めたものとする。そのとき，区間$0 \leqq x \leqq p$において，y 軸および 2 曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$によって囲まれた図形を D とする。Dをy軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積Vを求めよ。

$\boxed{36}$ ［東京工大］

点P$(t,\ s)$が$s=\sqrt{2}t^2-2t$を満たしながらxy平面上を動くときに，点Pを原点を中心として$45°$回転した点Qの軌跡として得られる曲線をCとする。さらに，曲線Cとx軸で囲まれた図形をDとする。

(1) 点Q$(x,\ y)$の座標を，tを用いて表せ。

(2) 直線$y=a$と曲線Cがただ1つの共有点をもつような定数aの値を求めよ。

(3) 図形Dをy軸のまわりに1回転してできる回転体の体積Vを求めよ。

$\boxed{37}$　　［名古屋大］

空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1)　B の中心と l との距離を求めよ。

(2)　l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{38}$ ［大阪大］

半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している。互いに重なる部分のない等しい半径をもつ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 T_1, T_2, $\cdots$, T_n があり，次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア)　T_i は S_1, S_2 にそれぞれ 1 点で接している $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

(イ)　T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に 1 点で接している。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　T_1, T_2, $\cdots$, T_n の共通の半径 r_n を求めよ。

(2)　S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1, T_2, $\cdots$, T_n の体積の和を W_n とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$ を求めよ。

34　　［金沢大］

(1)　$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ に対して，$y'=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$ となり，

$$y''=-\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})\cdot 2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^4}$$

$$=-\frac{(e^x+e^{-x})^2-2(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{2x}-6+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{4x}-6e^{2x}+1}{e^{2x}(e^x+e^{-x})^3}$$

ここで，$y''=0$ とすると，$e^{2x}=3\pm 2\sqrt{2}$ となり，

$$x=\frac{1}{2}\log(3\pm 2\sqrt{2})=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}\pm 1)^2=\log(\sqrt{2}\pm 1)$$

この x の値の前後で y'' の符号は変わり，x 座標の大きい方の変曲点 P の x 座標は $\log(\sqrt{2}+1)$ である。

(2)　条件より，$b=\log(\sqrt{2}+1)$，$\tan\theta=e^b=\sqrt{2}+1$ なので，

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(3+2\sqrt{2})}=-1$$

これより，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $2\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ となり，$\theta=\dfrac{3}{8}\pi$ である。

(3)　直線 $x=b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を S とする。

ここで，$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}>0$ なので，$S=\displaystyle\int_0^b\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^b\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ である。

(2)より，$e^x=\tan\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$e^x dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ より，

$$dx=\frac{1}{\tan\theta\cos^2\theta}d\theta=\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}d\theta$$

すると，$S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}d\theta=\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

［解 説］

(2)の設問が(3)の定積分の計算への誘導となっています。(2)がない場合は $e^x=t$ とおいた後，$t=\tan\theta$ とするので，結局，同じことになります。ただ，上端の値がちょっとわかりにくいですが。

$\boxed{35}$ ［長崎大］

(1)　$f(x)=\frac{1}{2}\cos x$，$g(x)=\cos\frac{x}{2}+c$　$(0\leqq x\leqq \pi)$に対し，曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が，$p\neq 0$として，点$(p,\ q)$で接することより，

$$f(p)=g(p)\cdots\cdots\cdots①,\quad f'(p)=g'(p)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\frac{1}{2}\cos p=\cos\frac{p}{2}+c\cdots\cdots\cdots③$

②より，$-\frac{1}{2}\sin p=-\frac{1}{2}\sin\frac{p}{2}$，$2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}=\sin\frac{p}{2}\cdots\cdots\cdots④$

④から，$\sin\frac{p}{2}\neq 0$なので，$\cos\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$，$p=\frac{2}{3}\pi$となり，$q=\frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{4}$

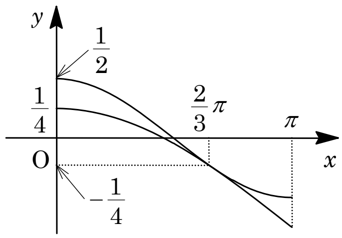
③から，$c=\frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}\pi-\cos\frac{1}{3}\pi=-\frac{3}{4}$

よって，接点$(p,\ q)=\left(\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{1}{4}\right)$となり，さらに区間$0\leqq x\leqq\pi$において，

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{2}\cos x-\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)-\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{4}$$
$$=\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0$$

すなわち，$f(x)\geqq g(x)$ $\left(\text{等号は } x=\frac{2}{3}\pi \text{ のとき成立}\right)$である。

(2)　区間$0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$において，$y$軸および2曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$によって囲まれた図形$D$を$y$軸のまわりに1回転してできる立体の体積$V$は，



$$V=2\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\left(\frac{1}{2}\cos x-\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\left(\cos x-2\cos\frac{x}{2}\right)dx+\frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\,dx$$
$$=\pi\left[x\left(\sin x-4\sin\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}-\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(\sin x-4\sin\frac{x}{2}\right)dx+\frac{3}{2}\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=\frac{2}{3}\pi^2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)-\pi\left[-\cos x+8\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\frac{\pi^3}{3}$$
$$=-\sqrt{3}\pi^2-\pi\left(\frac{9}{2}-7\right)+\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^3}{3}-\sqrt{3}\pi^2+\frac{5}{2}\pi$$

［解　説］

2曲線が接するという定義は，解答例の①かつ②です。また，(2)の求積は，いわゆる円筒分割の手法を用いています。

$\boxed{36}$　　　　［東京工大］

(1)　点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ を原点を中心として $45°$ 回転した点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} t-s \\ t+s \end{pmatrix}$$

ここで，$s=\sqrt{2}t^2-2t$ より，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(t-\sqrt{2}t^2+2t)=-t^2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}t$ ………①

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(t+\sqrt{2}t^2-2t)=t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t \text{ ………②}$$

(2)　②と $y=a$ を連立すると，$a=t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ となり，$a=\left(t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

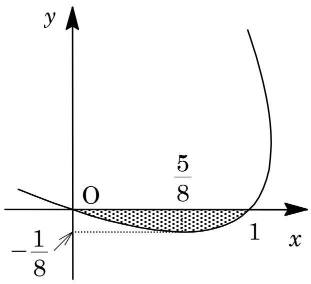
よって，直線 $y=a$ と点 Q の軌跡である曲線 C がただ 1 つの共有点をもつのは，実数 t の値がただ 1 つ存在するときより，$a=-\dfrac{1}{8}$ である。

(3)　x 軸の下側のある曲線 C の $0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{8}$ の部分を $x=x_1$，$\dfrac{5}{8} \leqq x \leqq 1$ の部分を $x=x_2$ とする。①②から，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと，

$$(f(0),\ g(0))=(0,\ 0)$$

$$\left(f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\ g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right)=\left(\frac{5}{8},\ -\frac{1}{8}\right)$$

$$\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=(1,\ 0)$$



そこで，右図の網点部 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0} {x_2}^2 dy-\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0} {x_1}^2 dy$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \{f(t)\}^2 g'(t)dt-\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{0} \{f(t)\}^2 g'(t)dt$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \{f(t)\}^2 g'(t)dt=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-t^2+\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)^2\left(2t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt$$

ここで，$\sqrt{2}t=u$ とおくと，$\sqrt{2}\,dt=du$ となり，

$$V=\pi\int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{2}u^2+\frac{3}{2}u\right)^2\left(\sqrt{2}u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}du$$

$$=\frac{1}{8}\pi\int_{0}^{1}(-u^2+3u)^2(2u-1)du=\frac{1}{8}\pi\int_{0}^{1}(2u^5-13u^4+24u^3-9u^2)du$$

$$=\frac{1}{8}\pi\left(\frac{2}{6}-\frac{13}{5}+\frac{24}{4}-\frac{9}{3}\right)=\frac{11}{120}\pi$$

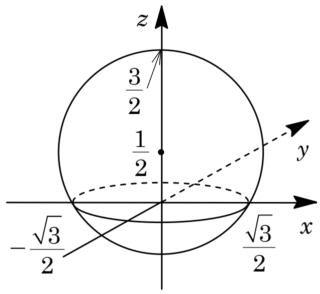
［解　説］

パラメータ積分によって体積を求める頻出問題です。

$\boxed{37}$ ［名古屋大］

(1)　半径 1 の球 B の中心から直線 l に垂線を下ろすと，その足は長さ $\sqrt{3}$ の線分の中点となり，B の中心と l との距離 d は，

$$d=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$



(2)　直線 l を x 軸とすると，(1)から B の球面は，

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，B を x 軸に垂直な平面 $x=k$ ……②で切断したときの断面は，①②を連立して，

$$y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1-k^2$$

これより，断面は平面 $x=k$ 上で，点 $\left(k,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円であることがわかる。なお，yz 平面に関する対称性より，以下，$0\leqq k\leqq 1$ で考える。

(i)　$0\leqq k\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

断面を平面 $x=k$ 上で，x 軸のまわりに 1 回転すると，半径 $\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}$ の円板となり，その面積 $S(k)$ は，

$$S(k)=\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right)^2=\pi\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)$$

(ii)　$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq k\leqq 1$ のとき

断面を平面 $x=k$ 上で，x 軸のまわりに 1 回転すると，外径 $\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}$ で内径 $\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}$ のドーナツ形となり，その面積 $S(k)$ は，

$$S(k)=\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}\right)^2=2\pi\sqrt{1-k^2}$$

(i)(ii)より，求める立体の体積を V とすると，対称性を考えて，

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)dk+2\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 2\sqrt{1-k^2}\,dk$$

$$=2\pi\left[\frac{5}{4}k-\frac{k^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+2\pi\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+4\pi\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

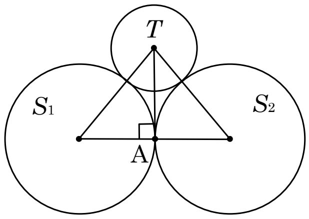
$$=\sqrt{3}\pi+\pi\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\pi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

［解　説］

立体の回転体の求積についての頻出問題です。要演習の 1 題です。

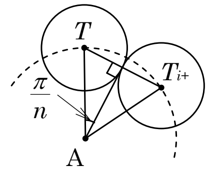
38　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1)　半径 1 の球 S_1，S_2 の接点を A とし，A と半径 r_n の球 T_i の中心との距離を x_n とすると，



$$x_n = \sqrt{(1+r_n)^2 - 1^2} = \sqrt{{r_n}^2 + 2r_n} \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$r_n = x_n \sin\frac{\pi}{n}$ より，$x_n = \dfrac{r_n}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdots\cdots\cdots ②$



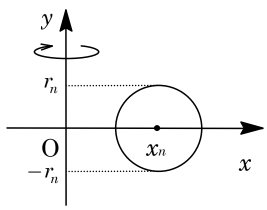
①②より，$\dfrac{r_n}{\sin\frac{\pi}{n}} = \sqrt{{r_n}^2 + 2r_n}$ となり，

$${r_n}^2 = ({r_n}^2 + 2r_n)\sin^2\frac{\pi}{n},\ \left(1 - \sin^2\frac{\pi}{n}\right)r_n = 2\sin^2\frac{\pi}{n}$$

よって，$r_n = \dfrac{2\sin^2\frac{\pi}{n}}{1-\sin^2\frac{\pi}{n}} = \dfrac{2\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}} = 2\tan^2\dfrac{\pi}{n}$

(2)　まず，T_1，T_2，…，T_n の体積の和 W_n は，$W_n = \dfrac{4}{3}n\pi {r_n}^3$

次に，S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体を，中心 $(x_n,\ 0)$，半径 r_n の円を y 軸のまわりに 1 回転してつくる考え，



$$(x - x_n)^2 + y^2 = {r_n}^2,\ x = x_n \pm \sqrt{{r_n}^2 - y^2}$$

すると，$y = k$ における回転体の断面積 $S(k)$ は，

$$S(k) = \pi\left\{(x_n + \sqrt{{r_n}^2 - k^2})^2 - (x_n - \sqrt{{r_n}^2 - k^2})^2\right\} = 4\pi x_n\sqrt{{r_n}^2 - k^2}$$

その体積 V_n は，対称性から，

$$V_n = 2\int_0^{r_n} S(k)\,dk = 8\pi x_n \int_0^{r_n} \sqrt{{r_n}^2 - k^2}\,dk = 8\pi x_n \cdot \frac{1}{4}\pi {r_n}^2 = 2\pi^2 x_n {r_n}^2$$

②より，$\dfrac{W_n}{V_n} = \dfrac{\frac{4}{3}n\pi {r_n}^3}{2\pi^2 x_n {r_n}^2} = \dfrac{2n}{3\pi}\cdot\dfrac{r_n}{x_n} = \dfrac{2n}{3\pi}\sin\dfrac{\pi}{n}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \frac{2}{3}$$

［解 説］

空間図形とその体積についての総合問題です。計算量も妥当なものです。