13 ［筑波大］

xy 平面上に楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1\ (a>\sqrt{13})$，および双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ があり，C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする。また C_1 と C_2 の交点 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t>0)$ における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1)　a と b の間に成り立つ関係式を求め，点 P の座標を a を用いて表せ。

(2)　l_1 と l_2 が直交することを示せ。

(3)　a が $a>\sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ。

$\boxed{13}$ ［筑波大］

(1) 楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1\ (a>\sqrt{13})$ ……①の焦点の座標は $\left(\pm\sqrt{a^2-9},\ 0\right)$ であり，

双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ ……②の焦点の座標は $\left(\pm\sqrt{4+b^2},\ 0\right)$ である。

条件より，$\sqrt{a^2-9}=\sqrt{4+b^2}$ から，$a^2-9=4+b^2$，$a^2-b^2=13$ ……③

また，C_1 と C_2 の第 1 象限の交点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は，①②より，

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{9}=1 \text{ ………④},\quad \frac{s^2}{4}-\frac{t^2}{b^2}=1 \text{ ………⑤}$$

④⑤より，$9s^2+a^2t^2=9a^2$，$b^2s^2-4t^2=4b^2$ となり，

$$\begin{pmatrix} 9 & a^2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^2 \\ t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9a^2 \\ 4b^2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} s^2 \\ t^2 \end{pmatrix}=\frac{1}{-36-a^2b^2}\begin{pmatrix} -4 & -a^2 \\ -b^2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9a^2 \\ 4b^2 \end{pmatrix}$$

③を代入すると，

$$\begin{pmatrix} s^2 \\ t^2 \end{pmatrix}=\frac{1}{36+a^2b^2}\begin{pmatrix} 36a^2+4a^2b^2 \\ 9a^2b^2-36b^2 \end{pmatrix}=\frac{1}{36+a^2(a^2-13)}\begin{pmatrix} 4a^2(9+a^2-13) \\ 9(a^2-4)(a^2-13) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(a^2-4)(a^2-9)}\begin{pmatrix} 4a^2(a^2-4) \\ 9(a^2-4)(a^2-13) \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-9}\begin{pmatrix} 4a^2 \\ 9(a^2-13) \end{pmatrix}$$

これより，$s=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}}$，$t=\dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}$ となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}},\ \dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}\right)$

(2) $\mathrm{P}(s,\ t)$ における C_1 の接線 l_1，C_2 の接線 l_2 の法線ベクトルを，それぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ とおくと，$\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{s}{a^2},\ \dfrac{t}{9}\right)$，$\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{s}{4},\ -\dfrac{t}{b^2}\right)$ となり，(1)から，

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\frac{s^2}{4a^2}-\frac{t^2}{9b^2}=\frac{4a^2}{4a^2(a^2-9)}-\frac{9(a^2-13)}{9(a^2-13)(a^2-9)}=0$$

よって，l_1 と l_2 は直交する。

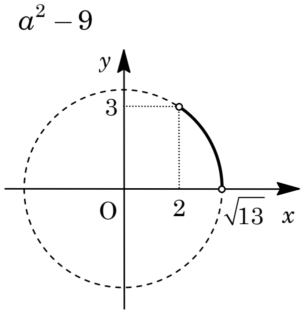
(3) (1)より，$s^2=\dfrac{4a^2}{a^2-9}=4+\dfrac{36}{a^2-9}$，$t^2=\dfrac{9(a^2-13)}{a^2-9}=9-\dfrac{36}{a^2-9}$

これより，$s^2+t^2=13$

また，$a>\sqrt{13}$ のとき，$0<\dfrac{36}{a^2-9}<9$ より，

$$4<s^2<13\ (2<s<\sqrt{13}),\quad 0<t^2<9\ (0<t<3)$$

よって，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡は右図の実線部である。



［解 説］

計算量は半端ではありません。特に(3)において，1 行目の変形をしなかったときは，たいへんなことになります。