$\boxed{22}$ ［千葉大］

関数 $f(x)=x^x\ (x>0)$ と正の実数 a について，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ における $\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ。

23　［大阪大］

$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア)　$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$ が成り立つ。

(イ)　$t>0$ に対して，等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$ を満たす実数 x が存在する。

このとき，$f(t)$ を求めよ。

$\boxed{24}$ ［熊本大］

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 a, b, c について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2)　自然数 a, b, c, d の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。

25　　［九州大］

2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ と定義する。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。

$\boxed{26}$ ［東京工大］

$a>1$ とし，次の不等式を考える。

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1)　$a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式$(*)$が成り立つことを示せ。

(2)　すべての $t>0$ に対して上の不等式$(*)$が成り立つような a の範囲を求めよ。

$\boxed{22}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］

(1)　$\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ において，$f(x)=x^x$，$g(x)=f(x)f(1-x)=x^x(1-x)^{1-x}$ とすると，

$$\log g(x)=\log x^x(1-x)^{1-x}=x\log x+(1-x)\log(1-x)$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\log x+\frac{x}{x}-\log(1-x)-\frac{1-x}{1-x}$$

$$=\log\frac{x}{1-x}$$

x	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

$g(x)>0$ から，$g(x)$ の増減は右表のようになり，その最大値は $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{4}\left(x=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$，最小値は $\dfrac{1}{2}\left(x=\dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2)　$\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ において，$h(x)=\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ とすると，

$$h(x)=\frac{x^x(1-x)^{1-x}a^a}{(ax)^{ax}(a(1-x))^{a(1-x)}}=\frac{x^x(1-x)^{1-x}a^a}{a^{ax}x^{ax}a^{a(1-x)}(1-x)^{a(1-x)}}$$

$$=x^{x-ax}(1-x)^{1-x-a(1-x)}a^{a-ax-a(1-x)}=x^{x(1-a)}(1-x)^{(1-x)(1-a)}$$

$$=\{x^x(1-x)^{1-x}\}^{1-a}=\{g(x)\}^{1-a}$$

これより，$h(x)$ の最小値については，(1)より，

(i)　$1-a \geqq 0\ (0<a\leqq 1)$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-a}$ をとる。

(ii)　$1-a<0\ (a>1)$ のとき　$x=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}$ で最小値 $\left(\dfrac{\sqrt[4]{27}}{4}\right)^{1-a}$ をとる。

［解　説］

微分と増減の問題です。(2)は，一見，複雑そうですが，(1)の結果がうまく利用できるように作問されていました。

$\boxed{23}$ ［大阪大］

まず，$g(x)=t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)-1-x$ とおくと，条件より，$g(x)\geqq 0$ かつ $g(x)=0$ となる x が存在することになり，

$$g'(x)=t\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}-1,\quad g''(x)=t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

すると，$t>0$ から $g''(x)>0$ となり，$g'(x)$ は単調に増加し，

$$\lim_{x\to-\infty}g'(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}g'(x)=\infty$$

よって，$g'(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在し，これを $x=\alpha$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになり，条件より，$g(\alpha)=0$ である。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

さて，$g'(\alpha)=t\cdot\dfrac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}-1=0$ より，

$$e^\alpha-e^{-\alpha}=\frac{2}{t},\quad e^{2\alpha}-\frac{2}{t}e^\alpha-1=0,\quad e^\alpha=\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

すると，$g(\alpha)=t\cdot\dfrac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2}+f(t)-1-\alpha=0$ から，

$$\frac{t}{2}\Bigl(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}\Bigr)+f(t)-1-\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=0$$

ここで，$\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\dfrac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\dfrac{-1+\sqrt{1+t^2}}{t}=\dfrac{2\sqrt{1+t^2}}{t}$ より，

$$f(t)=-\frac{t}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1+t^2}}{t}+1+\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=1-\sqrt{1+t^2}+\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

［解　説］

一見，難問風の問題設定ですが，誘導はなくてもスムーズに流れていきます。

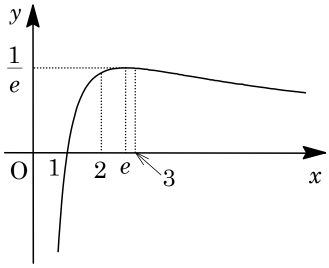
24　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

(1)　まず，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，グラフの概形は右下図である。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0



これより，正の実数 a, b, c について，

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\leqq\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{3}{e}$$

$$\log 4-\frac{3}{e}=\frac{2e\log 2-3}{e}>\frac{2\times 2.7\times 0.6-3}{e}>0$$

よって，$\dfrac{3}{e}<\log 4$ から，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(2)　$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$　$(a\leqq b\leqq c\,,\ d\geqq 3)$に対して，$\log a^{bc}b^{ca}c^{ab}=\log d^{abc}$ から，

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d\,,\ \ \frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log d$$

すると，(1)より $\log d<\log 4$ となり，d は 3 以上の整数より，$d=3$ である。

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log 3\quad(a\leqq b\leqq c)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，(＊)を満たす 1 組の整数解として，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ がある。

ここで，$f(3)-f(2)=\dfrac{\log 3}{3}-\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{\log 9-\log 8}{6}>0$ なので，

$$0=f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots\cdots$$

すると，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}\leqq f(3)+f(3)+f(3)=3\cdot\dfrac{\log 3}{3}=\log 3$ となり，等号が成立する，すなわち(＊)を満たす整数解は，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ のみである。

［解　説］

(2)において，1 組の整数解はすぐに目視でわかりますので，それ以外には存在しないという形式で記しています。$f(x)$ のグラフが役に立ったわけです。

25　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

n を 2 以上の自然数として，n 次関数 $f_n(x)$ に対して，

$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)=n!(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(x-\frac{1}{n}\right)$$

すると，$f_n(1)=f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\cdots=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=0$ となり，平均値の定理より，$f_n{}'(c)=0$ を満たす c が各区間 $\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$，…，$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$ において，少なくとも 1 つずつ存在する。

また，$f_n{}'(x)$ は $n-1$ 次関数より，方程式 $f_n{}'(x)=0$ の実数解は，高々 $n-1$ 個である。

よって，$f_n{}'(c)=0$ を満たす c は，各区間 $\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$，…，$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$ において，1 つずつ存在することになる。

この c を $c=c_1$，c_2，…，c_{n-1} $\left(\frac{1}{n}<c_{n-1}<\frac{1}{n-1}，\cdots，\frac{1}{3}<c_2<\frac{1}{2}，\frac{1}{2}<c_1<1\right)$ とおくと，$f_n{}'(x)$ の $n-1$ 次の係数は $n\cdot n!$ から，

$$f_n{}'(x)=n\cdot n!(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1})$$

これより，$f_n{}'(x)$ の符号は $x=c_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ の前後で変化する。

以上より，$f_n(x)$ は，区間 $\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ でただ 1 つの極値をとる。

［解 説］

グラフを対応させると，感覚的にはわかりますが，証明となると書きにくく，隔靴掻痒の感があります。

$\boxed{26}$　　［東京工大］

(1)　まず，$t>0$ のとき，$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{2}}$ とおくと，

$$f'(t)=e^t-e^{\frac{t}{2}}-\frac{t}{2}e^{\frac{t}{2}}=\left(e^{\frac{t}{2}}-1-\frac{t}{2}\right)e^{\frac{t}{2}}$$

さらに，$g(t)=e^{\frac{t}{2}}-1-\dfrac{t}{2}$ とおくと，$g'(t)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}-1\right)$

すると，$t>0$ のとき，$g'(t)>0$ から $g(t)>g(0)=0$ となり，すなわち $f'(t)>0$ から，$f(t)>f(0)=0$ である。

よって，すべての $t>0$ に対して，不等式 $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{2}}$ が成り立つ。

(2)　(1)と同様にして，$t>0$ のとき，$h(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{a}}$ とおくと，

$$h'(t)=e^t-e^{\frac{t}{a}}-\frac{t}{a}e^{\frac{t}{a}}=\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\frac{t}{a}\right)e^{\frac{t}{a}}$$

$k(t)=e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{t}{a}$ とおくと，$k'(t)=\dfrac{a-1}{a}e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a-1}\right)$

さて，$a>1$ より，$\dfrac{1}{a-1}>0$，$\dfrac{a-1}{a}>0$ となり，

(i)　$0<\dfrac{1}{a-1}\leqq 1$　$(a\geqq 2)$ のとき

$t>0$ において，$k'(t)>0$ から $k(t)>k(0)=0$ となり，すなわち $h'(t)>0$ から，$h(t)>h(0)=0$ である。

よって，すべての $t>0$ に対して，不等式 $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$ が成り立つ。

(ii)　$\dfrac{1}{a-1}>1$　$(1<a<2)$ のとき

$t>0$ において，$k'(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在する。これを α とおくと $k(t)$ の増減は右表のようになり，$k(\alpha)<0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}k(t)=\infty$ から，$\alpha<\beta$ を満たすある β に対して，$k(\beta)=0$ となる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	∞
$k'(t)$		$-$	0	$+$	
$k(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

すなわち，$h'(\beta)=0$ である。すると，$h(t)$ の増減は右表のようになり，すべての $t>0$ に対して $h(t)>0$，すなわち $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$ は成立しない。

t	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$

(i)(ii)より，求める a の範囲は，$a\geqq 2$ である。

［解 説］

微分法の不等式への応用問題です。なお，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}k(t)=\infty$ は証明なしで用いています。