30　　　　［千葉大］

$n,\ m$ を 0 以上の整数とし，$I_{n,\,m}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 2$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n-2,\,m+2}$ を使って表せ。

(2)　次の式　$I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ を示せ。

(3)　次の式　$\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし $0!=1$ とする。

$\boxed{31}$ ［大阪大］

$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。

$\boxed{32}$　　［新潟大］

自然数 n に対して，$a_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，不等式 $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right| \leqq \frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(3)　自然数 n に対して，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。

30　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］

(1)　$n \geqq 2$ のとき，部分積分を用いて，

$$I_{n,\,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\sin^m\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{m+1}\Big[\cos^{n-1}\theta\sin^{m+1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta\sin\theta\sin^{m+1}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta\sin^{m+2}\theta\,d\theta=\frac{n-1}{m+1}I_{n-2,\,m+2}$$

(2)　$x=\cos^2\theta$ とおくと，$dx=-2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$ となり，

$$I_{2n+1,\,2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\theta\sin^{2m+1}\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\sin^{2m}\theta\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^0 x^n(1-x)^m\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$$

(3)　(1)より，$I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{2n}{2m+2}I_{2n-1,\,2m+3}$ となり，

$$I_{2n+1,\,2m+1}=\frac{2n}{2m+2}\cdot\frac{2n-2}{2m+4}\cdot\frac{2n-4}{2m+6}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{2m+2n}I_{1,\,2m+2n+1}$$

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^{2m+2n+1}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{m!n!}{(m+n)!}\Big[\frac{1}{2m+2n+2}\sin^{2m+2n+2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{m!n!}{2(m+n+1)!}$$

また，二項展開を用いると，(2)より，

$$I_{2n+1,\,2m+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\{{}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_1x+\cdots+(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_mx^m\}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\{{}_m\mathrm{C}_0x^n-{}_m\mathrm{C}_1x^{n+1}+\cdots+(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_mx^{n+m}\}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}x^{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}x^{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}x^{n+m+1}\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\Big\{\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}\Big\}$$

以上より，$\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$

［解　説］

定積分の計算についての有名問題で，要演習の１題です。

$\boxed{31}$ ［大阪大］

まず，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフに対して，図 1 より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}&=\sum_{n=1}^{39999}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{40000}}\\&>\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{200}\\&=\Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_1^{40000}+\frac{1}{200}\\&=2(200-1)+\frac{1}{200}=398+\frac{1}{200}\end{aligned}$$

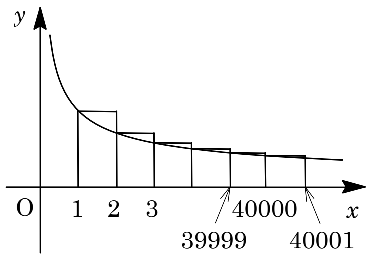

図1

また，同様に，図 2 より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}&=\frac{1}{\sqrt{1}}+\sum_{n=2}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}\\&<1+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\\&=1+398=399\end{aligned}$$

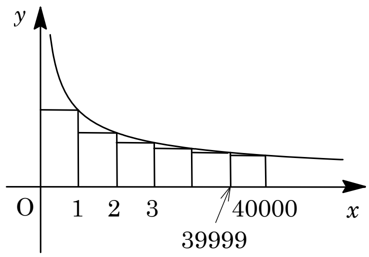

図2

以上より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は 398 である。

［解　説］

数列と定積分の融合問題です。$\sqrt{40000}=200$ に着目して，最初または最後の短冊は別扱いという形で，きれいに解けます。ただ，かなりアバウトな書き方になっていますが……。

$\boxed{32}$ ［新潟大］

(1)　$a_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とするとき，

$$\left|\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|=\left|\int_0^1\frac{-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx\right|=\int_0^1\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において，$\dfrac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\leqq x^{2(n+1)}$ より，

$$\int_0^1\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx\leqq\int_0^1 x^{2(n+1)}dx=\frac{1}{2n+3}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\left|\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\leqq\dfrac{1}{2n+3}\cdots\cdots\cdots③$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\big[\,x\,\big]_0^1-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=1-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

とおくと，$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ から，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，

$$I=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=1-\frac{\pi}{4}$$

(3)　$\dfrac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}=\dfrac{x^2\{1-(-x^2)^n\}}{1-(-x^2)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^2\cdot(-x^2)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k}$ から，

$$a_n=\int_0^1\{x^2-x^4+x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n}\}dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$$

(4)　(3)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=\lim_{n\to\infty}a_n\cdots\cdots\cdots④$

また，③より，$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{2n+3}\to 0$ から $\left|\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=1-\frac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots⑤$$

したがって，④⑤より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=1-\frac{\pi}{4}$

［解　説］

定積分と級数についての標準的な問題です。細かな誘導のため，方針に迷うことはありません。