$\boxed{18}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大］

xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 C_1，C_2，C_3，$\cdots$を次のように定める。

・C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する。

・正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

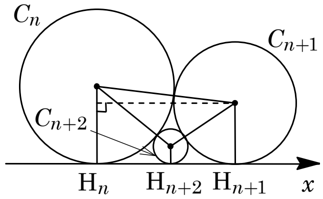
(1)　等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。

(2)　すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を一組与えよ。

(3)　$n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ。

18　　　　［名古屋大］

(1) 円 C_n，C_{n+1}，C_{n+2} の中心から x 軸に垂線を下ろし，その足をそれぞれ H_n，H_{n+1}，H_{n+2} とおくと，



$$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1} = \sqrt{(r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}$$

同様にして，$\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2} = 2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$

$$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}}$$

すると，$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2} + \mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2}$ より，

$$2\sqrt{r_n r_{n+1}} = 2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}} + 2\sqrt{r_n r_{n+2}}$$

両辺を $2\sqrt{r_n r_{n+1} r_{n+2}}$ で割って，$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ ………①

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = a_n$ とおくと，$r_1 = r_2 = 1$ から $a_1 = a_2 = 1$ となり，①より，

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1},\ a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \text{ ………②}$$

ここで，2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を $x = p,\ q\ (p < q)$ とおくと，$p = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

すると，②を変形して，$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ から，

$$a_{n+1} - pa_n = (a_2 - pa_1)q^{n-1} = (1-p)q^{n-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}q^{n-1} = q^n \text{ ………③}$$

同様に，②より，$a_{n+2} - qa_{n+1} = p(a_{n+1} - qa_n)$ となり，

$$a_{n+1} - qa_n = (a_2 - qa_1)p^{n-1} = (1-q)p^{n-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}p^{n-1} = p^n \text{ ………④}$$

③④より，$(-p+q)a_n = -p^n + q^n$ から，$a_n = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}p^n + \dfrac{1}{\sqrt{5}}q^n$

すると，条件から $a_n = s\alpha^n + t\beta^n$ なので，定数 α，β，s，t の値の 1 つとして，

$$\alpha = p = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta = q = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ s = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ t = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(3) (2)より，$r_n = \dfrac{1}{(s\alpha^n + t\beta^n)^2}$ より，$\dfrac{r_n}{k^n} = \dfrac{1}{k^n(s\alpha^n + t\beta^n)^2}$

まず，$k \leqq 0$ のとき，明らかに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}$ が正の値に収束する場合はない。

そこで，$k > 0$ として，$\dfrac{r_n}{k^n} = \dfrac{1}{\{s(\sqrt{k}\alpha)^n + t(\sqrt{k}\beta)^n\}^2}$

さて，$|\alpha| < 1 < |\beta|$ より，$|\sqrt{k}\alpha| < \sqrt{k} < |\sqrt{k}\beta| = \sqrt{k}\beta$ となり，

(i) $\sqrt{k}\beta > 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n} = 0$ となり，正の値に収束しない。

(ii)　$0<\sqrt{k}\beta<1$のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}=\infty$となり，正の値に収束しない。

(iii)　$\sqrt{k}\beta=1\left(\sqrt{k}=\dfrac{1}{\beta}\right)$のとき

このとき，$\dfrac{r_n}{k^n}=\dfrac{1}{\left\{s\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+t\right\}^2}$となり，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}=\frac{1}{t^2}=5$

(i)～(iii)より，数列$\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$が正の値に収束するのは，$k=\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$のときであり，このとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}=5$である。

［解 説］

ときどき見かける有名な構図の問題で，(2)までは定番といってもよいものです。