1 ［東北大・文］

$a>0$ を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1) $M(a)$ を求めよ。

(2) 実数 $x>0$ に対し，$g(x)=M(x)^2$ とおく。xy 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3) a が正の実数全体を動くとき，$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。

2　　［東京医歯大］

実数 $a,\ b$ に対し，$f(x)=x^3-3ax+b$ とおく。$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)$ の極値を a,b を用いて表せ。

(2)　$b\geqq 0$ のとき，M を a,b を用いて表せ。

(3)　a,b が実数全体を動くとき，M のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ ［九州大・理］

C_1，C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y=-x^2+2x\ (0 \leqq x \leqq 2),\ C_2 : y=-x^2-2x\ (-2 \leqq x \leqq 0)$$

また, a を実数とし, 直線 $y=a(x+4)$ を l とする。

(1) 直線 l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下, a が(1)の条件を満たすとする。このとき, l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1, x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1=S_2$ を満たす実数 a が $0<a<\dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

1　　［東北大・文］

(1)　$f(t)=-4t^3+(a+3)t$ に対して，$f'(t)=-12t^2+a+3$

$a>0$ より，$f'(t)=0$ の解は $t=\pm\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ となる。

(i)　$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}<1\ (0<a<9)$ のとき

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$f(t)$ は $t=\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ において最大値 $M(a)$ をとり，

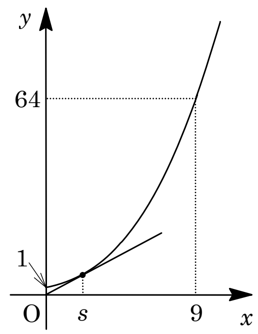
$$M(a)=\sqrt{\frac{a+3}{12}}\Big(-4\cdot\frac{a+3}{12}+a+3\Big)=\frac{\sqrt{a+3}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}(a+3)=\frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}}$$

(ii)　$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}\geqq 1\ (a\geqq 9)$ のとき

$0\leqq t\leqq 1$ において $f(t)$ は単調増加するので，$t=1$ において最大値 $M(a)$ をとり，

$$M(a)=-4+(a+3)=a-1$$

(2)　$g(x)=M(x)^2$ より，(1)から，



$$g(x)=\Big\{\frac{\sqrt{3}}{9}(x+3)^{\frac{3}{2}}\Big\}^2=\frac{1}{27}(x+3)^3\quad(0<x<9)$$

$$g(x)=(x-1)^2\quad(x\geqq 9)$$

さて，点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るより，

$$\frac{g(s)}{s}=g'(s)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(i)　$0<s<9$ のとき

$(*)$より，$\dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{(s+3)^3}{s}=\dfrac{1}{9}(s+3)^2$ から $s+3=3s$ となり，$s=\dfrac{3}{2}$

(ii)　$s\geqq 9$ のとき　$(*)$より，$\dfrac{(s-1)^2}{s}=2(s-1)$ から $s=-1$ となるが，成立しない。

(i)(ii)より，$s=\dfrac{3}{2}$ となり，このとき接線の傾きは，$\dfrac{1}{9}\Big(\dfrac{3}{2}+3\Big)^2=\dfrac{9}{4}$ である。

(3)　$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ より，$k^2=\dfrac{M(a)^2}{a}=\dfrac{g(a)}{a}$ となり，k^2 は原点 O と点 $(a,\ g(a))$ を結ぶ直線の傾きとなる。

すると，(2)より k^2 の最小値は $\dfrac{9}{4}$ となるので，k の最小値は $\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$ である。

［解　説］

微分法の総合問題です。(3)の分数関数を直線の傾きとみる方法は必須技法です。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京医歯大］

(1)　$f(x)=x^3-3ax+b$ とおくと，$a>0$ のとき，

$$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$$
$$=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$

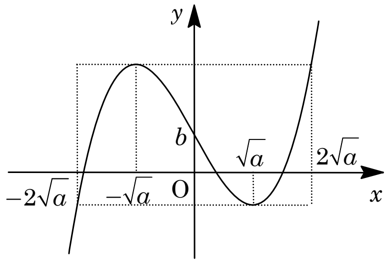
これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，極大値 $f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b$，極小値 $f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+b$ である。

(2)　まず，$f(x)+f(-x)=2b$ より，$y=f(x)$ のグラフは点 $(0,\ b)$ に関して対称である。そして，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とすると，$b\geqq 0$ の場合では，

(i)　$a>0$ のとき　(1)より $y=f(x)$ は右図のようになり，



(i-i)　$\sqrt{a}>1\ (a>1)$ のとき

$$M=|f(-1)|=f(-1)=-1+3a+b$$

(i-ii)　$\sqrt{a}\leqq 1<2\sqrt{a}\ \left(\dfrac{1}{4}<a\leqq 1\right)$ のとき

$$M=|f(-\sqrt{a})|=f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b$$

(i-iii)　$2\sqrt{a}\leqq 1\ \left(0<a\leqq\dfrac{1}{4}\right)$ のとき

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a+b$$

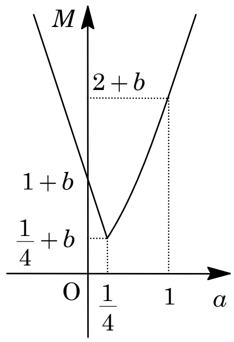
(ii)　$a\leqq 0$ のとき　$f'(x)\geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加し，

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a+b$$

(i)(ii)より，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=-1+3a+b\ (a>1),\quad M=2a\sqrt{a}+b\ \left(\frac{1}{4}<a\leqq 1\right)$$
$$M=1-3a+b\ \left(a\leqq\frac{1}{4}\right)$$

(3)　$b\geqq 0$ のとき，b の値を固定して，$a,\ M$ の関係を図示すると，右図のようになり，b が $b\geqq 0$ で動くとき，$M\geqq\dfrac{1}{4}$ である。



また，$b<0$ のとき，(2)と同様にすると，

(i)　$a>1$ のとき　$M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a-b$

(ii)　$\dfrac{1}{4}<a\leqq 1$ のとき　$M=|f(\sqrt{a})|=-f(\sqrt{a})=2a\sqrt{a}-b$

(iii)　$a\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき　$M=|f(-1)|=-f(-1)=1-3a-b$

(i)～(iii)より，b が $b<0$ で動くとき，$M>\dfrac{1}{4}$ である。

以上より，$a,\ b$ が実数全体を動くとき，M のとりうる範囲は $M\geqq\dfrac{1}{4}$ である。

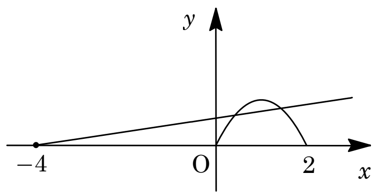
［解 説］

よく見かける 3 次関数の増減に関する問題ですが，絶対値をとる設定のため，複雑になっています。なお，上のグラフに破線で長方形を書き込んでいますが，この知識が方針を立てるうえで，ポイントになります。

$\boxed{3}$ ［九州大・理］

(1)　$C_1 : y=-x^2+2x\ (0\leqq x\leqq 2)$ と $l : y=a(x+4)$ の式を連立すると，$-x^2+2x=a(x+4)$ から，

$$x^2+(a-2)x+4a=0\cdots\cdots\cdots①$$



l と C_1 が $0<x<2$ で接する条件は，①より，

$$D=(a-2)^2-16a=0\cdots\cdots\cdots②$$

$$0<-\frac{a-2}{2}<2\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$a^2-20a+4=0$，$a=10\pm4\sqrt{6}$ となり，③から $-2<a<2$ なので，満たす a の値は，$a=10-4\sqrt{6}$ である。したがって，l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，右上図より，$0\leqq a<10-4\sqrt{6}$ である。

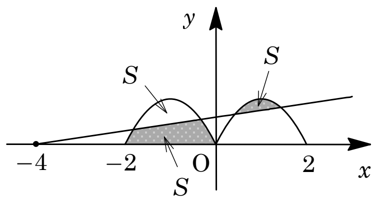
(2)　①の解 $x=\dfrac{-(a-2)\pm\sqrt{a^2-20a+4}}{2}$ を，$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1 は，

$$S_1=\int_\alpha^\beta\{-x^2+2x-a(x+4)\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{a^2-20a+4})^3$$

(3)　まず，x 軸と C_1 で囲まれた領域の面積は，

$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_0^2=\frac{4}{3}$$



次に，C_1 と y 軸対称である $C_2 : y=-x^2-2x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ と $l : y=a(x+4)$ の式を連立すると，$x^2+(a+2)x+4a=0\cdots\cdots\cdots④$

ここで，l と C_2 で囲まれた領域の面積を S_3 とおき，(2)と同様にすると，④の解が $x=\dfrac{-(a+2)\pm\sqrt{a^2-12a+4}}{2}$ より，$S_3=\dfrac{1}{6}(\sqrt{a^2-12a+4})^3$ となる。

さて，条件より x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積 S_2 に対し，$F(a)=S_1-S_2$ とおくと，$S_2=\dfrac{4}{3}-S_3$ より，

$$F(a)=\frac{1}{6}(\sqrt{a^2-20a+4})^3+\frac{1}{6}(\sqrt{a^2-12a+4})^3-\frac{4}{3}$$

すると，$F(0)=\dfrac{4}{3}>0$，$F\Big(\dfrac{1}{5}\Big)=\dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{1+41\sqrt{41}}{5^3}-8\Big)<0$ より，$F(a)=0$ すなわち $S_1=S_2$ を満たす実数 a が $0<a<\dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する。

［解　説］

$10-4\sqrt{6}\fallingdotseq0.202$ より，(3)の結論は，図からほとんど明らかなのですが……。