1　　［一橋大］

座標平面上の原点を O とする。点 $A(a,\ 0)$，点 $B(0,\ b)$ および点 C が，$OC=1$，$AB=BC=CA$ を満たしながら動く。

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。

2　　［名古屋大・文］

座標平面上の円 $C: x^2+(y-1)^2=1$ と，x 軸上の 2 点 P$(-a,\ 0)$，Q$(b,\ 0)$ を考える。ただし，$a>0$，$b>0$，$ab\neq 1$ とする。点 P，Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き，その 2 つの接線の交点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線 QR の方程式を求めよ。

(2)　R の座標を a, b で表せ。

(3)　R の y 座標が正であるとき，△PQR の周の長さを T とする。T を a, b で表せ。

(4)　2 点 P, Q が，条件「PQ $=4$ であり, R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき，T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ。

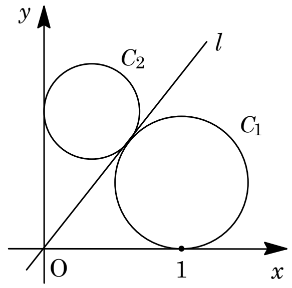
3　　　　［東京大・文］

l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに，以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i)　円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii)　円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点$(1,\ 0)$で接し，円 C_2 は y 軸と接する。



円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。

$\boxed{4}$　　［東京大・文］

座標平面上の 2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i)　頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある。

(ii)　点 A, P, B は同一直線上にある。

1　　　　［一橋大］

(1)　$C(p,\ q)$とおくと，$OC=1$から，$p^2+q^2=1$ ………①

また，$A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$に対し，$AB=BC=CA$より，

$$a^2+b^2=p^2+(q-b)^2\ \cdots\cdots\cdots②,\quad a^2+b^2=(p-a)^2+q^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$a^2=1-2bq$となり，$b\neq 0$のとき$q=\dfrac{1-a^2}{2b}$ ………④

①③より，$b^2=1-2ap$となり，$a\neq 0$のとき$p=\dfrac{1-b^2}{2a}$ ………⑤

④⑤を①に代入すると，$\dfrac{(1-b^2)^2}{4a^2}+\dfrac{(1-a^2)^2}{4b^2}=1$となり，

$$b^2(1-b^2)^2+a^2(1-a^2)^2=4a^2b^2\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

なお，$b=0$のときは$a=\pm1$，$a=0$のときは$b=\pm1$となるが，この場合も⑥はともに成立し，左辺を展開すると，

$$a^6+b^6-2(a^4+b^4)+a^2+b^2=4a^2b^2$$

ここで，$s=a^2+b^2$，$t=ab$とすると，

$$s^3-3t^2s-2(s^2-2t^2)+s=4t^2,\ s(s^2-3t^2-2s+1)=0$$

$s=0$のとき$a=b=0$，そして②から$p=q=0$となり不適なので，$s\neq 0$から，

$$s^2-3t^2-2s+1=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

(2)　$\triangle ABC$は正三角形なので，その面積をSとおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}s\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

さて，⑦より$(s-1)^2-3t^2=0$から，$s=1\pm\sqrt{3}t$ ………⑨

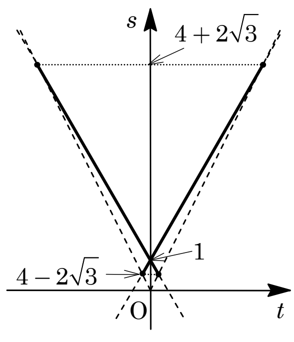
また，$s=(a+b)^2-2ab$から，$(a+b)^2=s+2t$となり，$s+2t\geqq 0$ ……⑩で，

$$a+b=\pm\sqrt{s+2t}$$

すると，a，bは，2次方程式$x^2\mp\sqrt{s+2t}\,x+t=0$の2つの解となり，

$$D=(s+2t)-4t=s-2t\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

⑨かつ⑩かつ⑪をts平面上に図示すると，右図の実線部となる。



これより，$4-2\sqrt{3}\leqq s\leqq 4+2\sqrt{3}$となり，⑧から，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(4-2\sqrt{3})\leqq S\leqq\frac{\sqrt{3}}{4}(4+2\sqrt{3}),\ \sqrt{3}-\frac{3}{2}\leqq S\leqq\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

［解　説］

(2)では図をかいてsの範囲を求めましたが，⑨よりtを消去しても可能です。

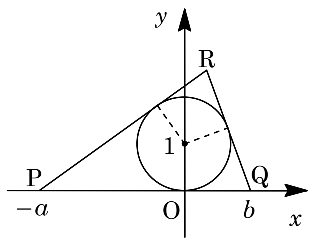
2　　［名古屋大・文］

(1)　直線 QR は x 軸に平行でないので，その法線ベクトルの成分を$(1,\ m)$とおくと，その方程式は，

$$(x-b)+my=0\,,\ x+my-b=0\cdots\cdots\text{①}$$

①は，円 $C: x^2+(y-1)^2=1$ に接することより，

$$\frac{|m-b|}{\sqrt{1+m^2}}=1\,,\ (m-b)^2=1+m^2$$



よって，$2bm=b^2-1$ より，$m=\dfrac{b^2-1}{2b}$ となり，①に代入すると，

$$x+\frac{b^2-1}{2b}y-b=0\,,\ 2bx+(b^2-1)y-2b^2=0\cdots\cdots\text{②}$$

(2)　直線 PR の方程式は，(1)の結果から，$-2ax+(a^2-1)y-2a^2=0\cdots\cdots$③

②③を連立すると，$\{a(b^2-1)+b(a^2-1)\}y=2ab^2+2a^2b$ となり，

$$\{ab(a+b)-(a+b)\}y=2ab(a+b)\,,\ y=\frac{2ab}{ab-1}\quad(ab\neq1\,,\ a+b>0)$$

②に代入すると，$2bx+\dfrac{2ab}{ab-1}(b^2-1)-2b^2=0$ となり，

$$x+\frac{a}{ab-1}(b^2-1)-b=0\,,\ x=-\frac{a}{ab-1}(b^2-1)+b=\frac{a-b}{ab-1}$$

これより，$\mathrm{R}\left(\dfrac{a-b}{ab-1},\ \dfrac{2ab}{ab-1}\right)$である。

(3)　R の y 座標が正より，$\dfrac{2ab}{ab-1}>0$ すなわち $ab>1$ であり，このとき，

$$\mathrm{QR}^2=\left(\frac{a-b}{ab-1}-b\right)^2+\left(\frac{2ab}{ab-1}\right)^2=\frac{a^2(1-b^2)^2+4a^2b^2}{(ab-1)^2}=\frac{a^2(1+b^2)^2}{(ab-1)^2}$$

よって，$\mathrm{QR}=\dfrac{a(1+b^2)}{ab-1}$ となり，同様にすると $\mathrm{PR}=\dfrac{b(1+a^2)}{ab-1}$ となる。

そこで，△PQR の周の長さを T とすると，$\mathrm{PQ}=a+b$ より，

$$T=a+b+\frac{a(1+b^2)}{ab-1}+\frac{b(1+a^2)}{ab-1}=\frac{2ab(a+b)}{ab-1}\cdots\cdots\text{④}$$

(4)　$\mathrm{PQ}=4$ で R の y 座標が正より，$a+b=4\,,\ ab>1$ である。

ここで，$\sqrt{ab}\leqq\dfrac{a+b}{2}=2$ より $ab\leqq4$ となり，$1<ab\leqq4$ である。すると，④から，

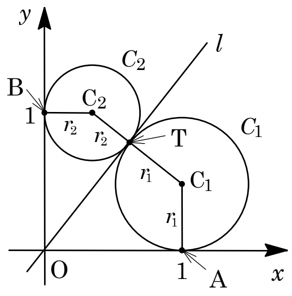
$$T=\frac{8ab}{ab-1}=\frac{8}{1-\dfrac{1}{ab}}\geqq\frac{8}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{32}{3}$$

これより，$ab=4\ (a=b=2)$ のとき T は最小値 $\dfrac{32}{3}$ をとる。

［解　説］

別解もいろいろ可能な円と直線に関する標準的な問題です。特に(3)は……。

3　　［東京大・文］



円 C_1 と x 軸，円 C_2 と y 軸，C_1 と C_2 の接点を，それぞれ A, B, T とおくと，$\mathrm{OB}=\mathrm{OT}=\mathrm{OA}=1$ より，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ となる。

すると，円 C_1 の半径 r_1，円 C_2 の半径 r_2 より，円 C_1 の中心 $\mathrm{C_1}(1,\ r_1)$，円 C_2 の中心 $\mathrm{C_2}(r_2,\ 1)$ と表せる。

ここで，円 C_1 と C_2 が接する条件は，$\mathrm{C_1C_2}=r_1+r_2$ より，

$$\sqrt{(r_2-1)^2+(1-r_1)^2}=r_1+r_2$$

これより，$(r_2-1)^2+(1-r_1)^2=(r_1+r_2)^2$ となり，

$$r_1r_2+r_1+r_2=1,\ (1+r_1)r_2=1-r_1,\ r_2=\frac{1-r_1}{1+r_1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$0<r_1<1$ のもとで，$(*)$から，

$$8r_1+9r_2=8r_1+\frac{9-9r_1}{1+r_1}=8r_1+\frac{-9(1+r_1)+18}{1+r_1}=8r_1-9+\frac{18}{1+r_1}$$
$$=8+8r_1+\frac{18}{1+r_1}-17=8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17$$

そこで，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17\geqq 2\sqrt{8(1+r_1)\cdot\frac{18}{1+r_1}}-17=2\sqrt{2^3\cdot 2\cdot 3^2}-17=7$$

等号は，$8(1+r_1)=\frac{18}{1+r_1}$ すなわち $1+r_1=\frac{3}{2}\left(r_1=\frac{1}{2}\right)$ のとき成り立ち，この値は $0<r_1<1$ を満たしている。

以上より，$8r_1+9r_2$ の最小値は 7 である。

このとき，$r_1=\frac{1}{2}$，$(*)$から $r_2=\frac{1}{3}$ となり，$\mathrm{C_1}\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C_2}\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$ である。そして，接点 T は線分 $\mathrm{C_1C_2}$ を $r_1:r_2=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=3:2$ に内分する点より，$\mathrm{T}(p,\ q)$ とおくと，

$$p=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5},\ q=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$$

よって，線分 OT の傾きは $\frac{q}{p}=\frac{4}{3}$ となり，直線 l の方程式は $y=\frac{4}{3}x$ である。

［解　説］

解法のポイントは，冒頭に記した点 B の y 座標が 1 という点です。当然といえば当然ですが……。ただ，ここを外すとシビアな結果になります。なお，分数関数の微分法は範囲外ですので，最小値を求める際には，相加平均と相乗平均の関係を利用するように式変形をしています。

$\boxed{4}$ ［東京大・文］

2 点 $A(-1,\ 1)$，$B(1,\ -1)$ および点 $P(x,\ y)$ $(|x|\leqq 1)$ に対して，まず条件(ii)から，点 A, P, B は同一直線上にあることより，点 P の範囲は，$y=-x$ $(|x|\leqq 1)$ である。

次に，条件(i)から，2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ ……①とおくと，2 点 A, B を通ることより，

$$a-b+c=1\ \cdots\cdots\text{②},\quad a+b+c=-1\ \cdots\cdots\text{③}$$

②③より，$b=-1$，$c=-a$ となり，①に代入すると，

$$y=ax^2-x-a=a\Big(x-\frac{1}{2a}\Big)^2-a-\frac{1}{4a}\ \cdots\cdots\text{④}$$

すると，頂点の x 座標の絶対値が 1 以上より，$\left|\dfrac{1}{2a}\right|\geqq 1$ から $0<|a|\leqq\dfrac{1}{2}$ ………⑤

そこで，点 P の範囲は，⑤の条件のもとで曲線④の $|x|\leqq 1$ における通過領域である。

まず，④を $(x^2-1)a-(x+y)=0$ ……⑥と変形すると，点 $P(x,\ y)$ の範囲を表す不等式は，この a についての方程式⑥が，⑤の範囲に実数解をもつ条件として得られる。

(a)　$x=\pm 1$ のとき　$x+y=0$ のとき，任意の a に対して⑥は成立するので，

$(x,\ y)=(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$

(b)　$x\neq\pm 1$ のとき　⑥より $a=\dfrac{x+y}{x^2-1}$ となり，⑤に代入すると，$0<\left|\dfrac{x+y}{x^2-1}\right|\leqq\dfrac{1}{2}$

$$0<|x+y|\leqq\frac{1}{2}|x^2-1|,\quad 0<|x+y|\leqq-\frac{1}{2}(x^2-1)\ (|x|\leqq 1)$$

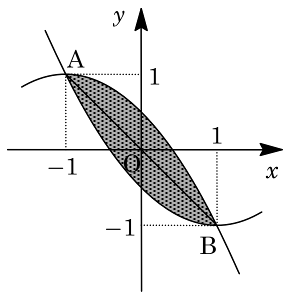
(b-i)　$x+y>0$ のとき　$x+y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\leqq-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$$

(b-ii)　$x+y<0$ のとき　$-x-y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\geqq\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$$

以上より，条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



この領域の面積を S とすると，

$$S=\int_{-1}^{1}\Big\{\Big(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\Big)-\Big(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\Big)\Big\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=\frac{1}{6}(1+1)^3=\frac{4}{3}$$

［解 説］

放物線の通過領域の問題です。すばやく結論の導ける条件(ii)から記しています。