1　　［筑波大・理］

半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が，辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする。また，$\alpha=\angle\mathrm{CAB}$，$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とし，三角形 ABC の面積を S とする。

(1)　線分 AQ の長さを α を用いて表し，線分 QC の長さを β を用いて表せ。

(2)　$t=\tan\dfrac{\beta}{2}$ とおく。このとき，S を t を用いて表せ。

(3)　不等式 $S\geqq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。さらに，等号が成立するのは，三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ。

$\boxed{2}$ ［京都大］

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a)　少なくとも 2 つの内角は $90°$ である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。

3　　［東北大］

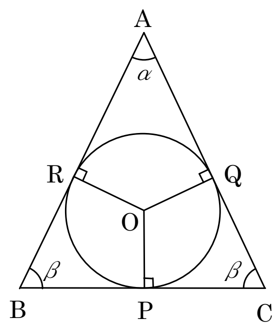
$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3)　辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

1　　［筑波大・理］



(1)　二等辺三角形 ABC の半径 1 の内接円の中心を O とおくと，△AOQ において，

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\mathrm{AQ}},\ \mathrm{AQ}=\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

△COQ において同様に，$\mathrm{QC}=\dfrac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}$

(2)　まず，$\mathrm{BC}=2\mathrm{PC}=2\mathrm{QC}=\dfrac{2}{\tan\frac{\beta}{2}}=\dfrac{2}{t}$

また，A, O, P は同一直線上にあるので，

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PC}\tan\beta=\mathrm{QC}\tan\beta=\frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2}{1-t^2}$$

よって，△ABC の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AP}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{t}\cdot\dfrac{2}{1-t^2}=\dfrac{2}{t(1-t^2)}$

(3)　$\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\pi-\alpha}{4}$ より $0<\dfrac{\beta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ となり，$0<\tan\dfrac{\beta}{2}<1$ すなわち $0<t<1$ である。

さて，$f(t)=t(1-t^2)$ とおくと，$S=\dfrac{2}{f(t)}$ となり，

$$f'(t)=1-3t^2$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$0<t<1$ において $0<f(t)\leqq\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ であり，

$$S\geqq 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

等号が成り立つのは，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のときなので，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$ である。このとき $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ となり，△ABC は正三角形である。

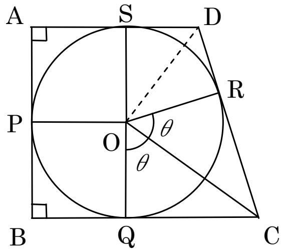
［解　説］

三角比と図形についての基本問題です。加えて，最小値を求めるときに微分法を利用するように構成されています。

２　　［京都大］

四角形 ABCD について，その内接円の中心を O，また内接円との接点を P，Q，R，S とおく。条件(a)より，90° の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i)　90° の内角が隣り合う ($\angle A = \angle B = 90°$) のとき



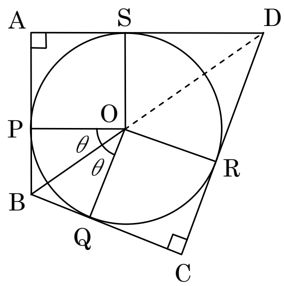
右図のように $\angle COQ = \angle COR = \theta\ (0° < \theta < 90°)$ とおくと，$\angle DOR = \angle DOS = 90° - \theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S = 1^2 + 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta + 2\cdot\frac{1}{2}\tan(90° - \theta)$$

$$= 2 + \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \geqq 2 + 2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}} = 4$$

等号成立は $\tan\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}\ (\theta = 45°)$ のときであり，このとき四角形 ABCD は正方形となる。

(ii)　90° の内角が向かい合う ($\angle A = \angle C = 90°$) のとき



右図のように $\angle BOP = \angle BOQ = \theta\ (0° < \theta < 90°)$ とおくと，$\angle DOR = \angle DOS = 90° - \theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S = 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta + 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\tan(90° - \theta)$$

$$= 2 + \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$$

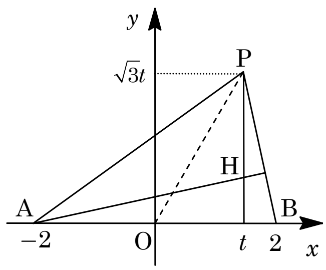
(i)と同様に，四角形 ABCD が正方形のとき S は最小値 4 をとる。

(i)(ii)より，四角形 ABCD の面積の最小値は 4 である。

［解　説］

いったん 2 つの場合に分けましたが，計算を進めていくと，同じものとなります。そして，結論は予想通りとなりました。

３　　　　［東北大］



(1)　$t>0$ のとき $\angle\mathrm{PAB}<\dfrac{\pi}{2}$ であるので，△APB が鋭角三角形となる条件は $\angle\mathrm{PBA}<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\angle\mathrm{APB}<\dfrac{\pi}{2}$ である。

すると，$t<2$ かつ $\mathrm{OP}>2$ $(2t>2)$ となる。

よって，求める t の範囲は，$1<t<2$ である。

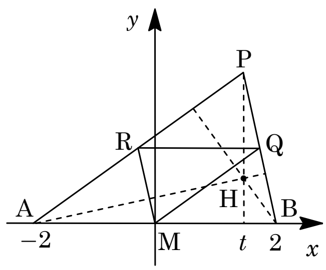
(2)　P から辺 AB に引いた垂線の式は，$x=t$ ………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}t)$ より，A から辺 BP に引いた垂線の式は,

$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}ty=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$(t-2)(t+2)+\sqrt{3}ty=0$ より，$y=\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$

よって，△APB の垂心 H の座標は，$\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$ である。



(3)　M, Q, R は，それぞれ辺 AB, BP, PA の中点なので,

$$\mathrm{RQ}/\!/\mathrm{AB},\ \mathrm{QM}/\!/\mathrm{PA},\ \mathrm{RM}/\!/\mathrm{PB}$$

ここで，H は△APB の垂心より,

$$\mathrm{PH}\perp\mathrm{RQ},\ \mathrm{BH}\perp\mathrm{QM},\ \mathrm{AH}\perp\mathrm{RM}\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，xy 平面に垂直に z 軸をとり，△ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体において, P, A, B が重なってできる頂点を C とする。

すると，③より，s を正の実数として，$\mathrm{C}\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t},\ s\right)$ と表せる。

そこで，$\mathrm{CM}=2$ から，$t^2+\left(\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2+s^2=4$ となり,

$$s^2=4-t^2-\frac{(4-t^2)^2}{3t^2}=\frac{-4t^4+20t^2-16}{3t^2}$$

よって，$s=\dfrac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}$ となり，四面体 CMQR の体積を V とすると,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABP}\right)s=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\frac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

$1<t<2$ から，$t^2=\dfrac{5}{2}$ $\left(t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ のとき, V は最大値 $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{1}{2}$ をとる。

［解 説］

一見，無関係と思える(2)と(3)ですが，(2)は(3)に不可欠な誘導です。なお，直角三角形が題材になっている類題が，北大で 2009 年に出ています。