$\boxed{1}$ ［千葉大・文］

$k,\ m,\ n$ を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき，k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2) $4m+5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。

2　　［九州大・理］

以下の問いに答えよ。

(1)　n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3)　$p,\ q$ を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす $p,\ q$ の組をすべて求めよ。

3　　　　［京都大・理］

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

4　　　　［東北大・文］

次の性質をもつ数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=3,\ a_{n+1}>a_n,\ {a_n}^2-2a_na_{n+1}+{a_{n+1}}^2=3(a_n+a_{n+1})\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，a_n+a_{n+2} を a_{n+1} を用いて表せ。

(2)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

5 ［広島大・文］

n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする。ただし，p_1，q_1 は ${p_1}^2-4q_1=4$ を満たすとする。2 次方程式 $x^2-p_nx+q_n=0$ は異なる実数解 α_n，β_n をもつとする。ただし，$\alpha_n<\beta_n$ とする。$c_n=\beta_n-\alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ。

(2) c_n を n の式で表せ。

(3) $p_n=n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・理］

b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α，β とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。これを証明せよ。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・理］

数列$\{p_n\}$を次のように定める。

$$p_1 = 1,\ \ p_2 = 2,\ \ p_{n+2} = \frac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2 + {p_n}^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列$\{q_n\}$を次のように定める。

$$q_1 = 1,\ \ q_2 = 1,\ \ q_{n+2} = q_{n+1} + q_n\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ を示せ。

1　　　　［千葉大・文］

(1)　k を自然数, l, N を 0 以上の整数とするとき,

(i)　$k=3l+1$ のとき　$2^k=2^{3l+1}=2\cdot 8^l=2(7+1)^l=2(7N+1)=7\cdot 2N+2$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 2 である。

(ii)　$k=3l+2$ のとき　$2^k=2^{3l+2}=4\cdot 8^l=4(7+1)^l=4(7N+1)=7\cdot 4N+4$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 4 である。

(iii)　$k=3l+3$ のとき　$2^k=2^{3l+3}=8\cdot 8^l=8(7+1)^l=8(7N+1)=7(8N+1)+1$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 1 である。

(i)～(iii)より, 2^k を 7 で割った余りが 4 のとき, k を 3 で割った余りは 2 である。

(2)　m, n を自然数で, $4m+5n$ が 3 で割り切れるとき,

$$4m+5n=3(m+2n)+(m-n)$$

これより, $m-n$ は 3 で割り切れる, すなわち m を 3 で割った余りと n を 3 で割った余りは等しくなる。そこで, m', n' を 0 以上の整数として,

(i)　m, n を 3 で割った余りが 1 のとき　$m=3m'+1$, $n=3n'+1$

$$mn=(3m'+1)(3n'+1)=3(3m'n'+m'+n')+1$$

これより, mn を 3 で割った余りは 1 である。

(ii)　m, n を 3 で割った余りが 2 のとき　$m=3m'+2$, $n=3n'+2$

$$mn=(3m'+2)(3n'+2)=3(3m'n'+2m'+2n'+1)+1$$

これより, mn を 3 で割った余りは 1 である。

(iii)　m, n を 3 で割った余りが 0 のとき　$m=3m'+3$, $n=3n'+3$

$$mn=(3m'+3)(3n'+3)=3(3m'n'+3m'+3n'+3)$$

これより, mn を 3 で割った余りは 0 である。

(i)～(iii)より, mn を 3 で割った余りは 0 または 1 であり, 2 ではない。

したがって, (1)より, 2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではない。

［解　説］

テーマは整数の余りによる分類です。(2)の最後の行は, (1)で証明した命題の対偶を利用しています。なお, 合同式を用いて記述しても構いません。

２　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・理］

(1)　n が正の偶数のとき，l を自然数として，$n=2l$ とおくと，

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{2l}-1=4^l-1=(3+1)^l-1\\&=(3^l+{}_lC_1 3^{l-1}+{}_lC_2 3^{l-2}+\cdots+{}_lC_{l-1}3+1)-1\\&=3(3^{l-1}+{}_lC_1 3^{l-2}+{}_lC_2 3^{l-3}+\cdots+{}_lC_{l-1})\end{aligned}$$

よって，2^n-1 は 3 の倍数である。

(2)　n を自然数とするとき，2^n+1 と 2^n-1 の最大公約数を g とおくと，

$$2^n+1=ga\cdots\cdots①,\ \ 2^n-1=gb\cdots\cdots②$$（a と b は互いに素）

①－②より，$2=g(a-b)$ となり，$g=2$ または $g=1$ である。

$g=2$ のとき，①は $2^n+1=2a$ となり，左辺は奇数，右辺は偶数で成立しない。

よって，$g=1$ から，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である。

(3)　異なる素数 $p,\ q$ に対して，$2^{p-1}-1=pq^2\cdots\cdots\cdots③$

(i)　p が偶数のとき

p は素数より $p=2$，すると，③から $2^1-1=2q^2$ となり，素数 q は存在しない。

(ii)　p が奇数のとき

$p-1$ は偶数となり，(1)の結果から $2^{p-1}-1$ は 3 の倍数である。すると，③から pq^2 は 3 の倍数となり，$p=3$ または $q=3$ である。

(ii-i)　$p=3$ のとき

③は $2^2-1=3q^2$ となり，素数 q は存在しない。

(ii-ii)　$q=3$ のとき

③は $2^{p-1}-1=9p\cdots\cdots④$となり，$k$ を自然数として，$p=2k+1$ とおくと，

$$2^{p-1}-1=2^{2k}-1=(2^k+1)(2^k-1)$$

(2)から 2^k+1 と 2^k-1 は互いに素で，④は $(2^k+1)(2^k-1)=9(2k+1)$ となり，

$$(2^k+1,\ 2^k-1)=(9,\ 2k+1)\ \text{または}\ (2k+1,\ 9)$$

$(2^k+1,\ 2^k-1)=(9,\ 2k+1)$ のとき，$k=3$ すなわち $p=7$ となる。

$(2^k+1,\ 2^k-1)=(2k+1,\ 9)$ のとき，満たす k は存在しない。

(i)(ii)より，③を満たす $p,\ q$ の組は，$(p,\ q)=(7,\ 3)$ のみである。

［解　説］

誘導つきの整数問題です。なお，④を満たす p を求めるために，(2)の結論を利用する方法で記しましたが，グラフをイメージして，直接的に解いても構いません。

$\boxed{3}$ ［京都大・理］

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数とするとき，$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ に対して，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $px+q$，余りを r とおくと，p,q,r は実数となり，

$$f(x)=g(x)(px+q)+r \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと，①から $h(x)=px+q+\dfrac{r}{g(x)}=px+q+\dfrac{r}{dx+e}$

ここで, n を 2 以上の整数とすると，条件より，$h(n-1)$，$h(n)$，$h(n+1)$ はすべて整数なので，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ の値も整数となり，

$$\begin{aligned}&h(n-1)+h(n+1)-2h(n)\\&=pn-p+q+\frac{r}{dn-d+e}+pn+p+q+\frac{r}{dn+d+e}-2\left(pn+q+\frac{r}{dn+e}\right)\\&=\frac{r}{dn-d+e}+\frac{r}{dn+d+e}-\frac{2r}{dn+e}\\&=\frac{2d^2r}{(dn-d+e)(dn+d+e)(dn+e)} \cdots\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

すると，十分に大きい n に対しても②が整数となることより，$r=0$ である。

よって，①から，$f(x)=g(x)(px+q)$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

［解 説］

結論の $r=0$ を示すために，$h(n)$ の等差数列部分である $pn+q$ を消すことを考え，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ を計算しています。そして，得られた式が②というわけです。階差を 2 回とったと考えてもよいですが……。なお，既視感があったので，過去問を調べたところ，1991 年の後期に類題が出ていました。

$\boxed{4}$ ［東北大・文］

(1) 条件より，$a_n{}^2-2a_na_{n+1}+a_{n+1}{}^2=3(a_n+a_{n+1})$ ……①なので，

$$a_{n+1}{}^2-2a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}{}^2=3(a_{n+1}+a_{n+2})\ \cdots\cdots\cdots②$$

②－①より，$a_{n+2}{}^2-a_n{}^2-2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=3(a_{n+2}-a_n)$

ここで，$a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$ から，$a_{n+2}-a_n>0$ となり，

$$a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=3\,,\ a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}+3\ \cdots\cdots\cdots③$$

(2) ③より，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=3$ となり，$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=3$ ………④

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，④より，$b_{n+1}-b_n=3$ となり，

$$b_n=b_1+3(n-1)\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，①より，$a_1{}^2-2a_1a_2+a_2{}^2=3(a_1+a_2)$ となり，$a_1=3$ から，

$$9-6a_2+a_2{}^2=3(3+a_2)\,,\ a_2{}^2-9a_2=0$$

すると，$a_2>a_1=3$ から $a_2=9$ となり，$b_1=a_2-a_1=6$

よって，⑤から，$b_n=6+3(n-1)=3(n+1)$

(3) (2)より，$n\geqq 2$ において，

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}3(k+1)=3+3\cdot\frac{2+n}{2}(n-1)=3+\frac{3}{2}(n^2+n-2)=\frac{3}{2}n(n+1)$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

［解 説］

誘導つきの漸化式の問題です。(1)の結果が(2)へとつながり，さらに(3)へとスムーズに解いていくことができます。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・文］

(1)　$r_n = \log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n}) = \log_2\sqrt{n}\,(n+1)$ より，$r_{n+1} = \log_2\sqrt{n+1}\,(n+2)$ となり，

$$r_{n+1}-r_n = \log_2\frac{\sqrt{n+1}\,(n+2)}{\sqrt{n}\,(n+1)} = \log_2\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$$

よって，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = 2^{r_{n+1}-r_n}$ ………①

(2)　①より，$\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 2^{r_{n+1}-r_n}$ となり，$c_{n+1} = 2^{r_{n+1}-r_n}c_n$

ここで，$f(n) = 2^{r_{n+1}-r_n}$ とおくと，$c_{n+1} = f(n)c_n$ となり，$n \geqq 2$ において，

$$c_n = c_1 f(1)f(2)\cdots f(n-1) = c_1\cdot 2^{r_2-r_1}\cdot 2^{r_3-r_2}\cdot\cdots\cdot 2^{r_n-r_{n-1}} = c_1\cdot 2^{r_n-r_1}$$
$$= c_1\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}\,(n+1)-\log_2 2} = c_1\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}\,(n+1)-1}\ \text{………②}$$

さて，$x^2 - p_n x + q_n = 0$ の実数解を α_n，β_n $(\alpha_n < \beta_n)$ とすると，

$$\alpha_n = \frac{p_n - \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}}{2},\quad \beta_n = \frac{p_n + \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}}{2}$$

すると，$c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}$ となり，$c_1 = \sqrt{{p_1}^2 - 4q_1} = \sqrt{4} = 2$

よって，②より，$c_n = 2\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}\,(n+1)-1} = 2^{\log_2\sqrt{n}\,(n+1)} = \sqrt{n}\,(n+1)$ ………③

なお, ③は $n=1$ のときも成立している。

(3)　③より，$\sqrt{{p_n}^2 - 4q_n} = \sqrt{n}\,(n+1)$ となり，${p_n}^2 - 4q_n = n(n+1)^2$ ………④

そこで，$p_n = n\sqrt{n}$ のとき，${p_n}^2 = n^3$ となり，④より，

$$q_n = \frac{1}{4}\{n^3 - n(n+1)^2\} = -\frac{1}{4}n(2n+1)$$

［解 説］

２次方程式の解を題材とした，誘導つきの漸化式の問題です。(2)の漸化式 $c_{n+1} = f(n)c_n$ を解くことがポイントとなっています。詳しくは「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・理］

(1)　$b^2+4c>0$ のとき，$x^2-bx-c=0$ の実数解 α，β について，

$$\alpha+\beta=b\,,\ \ \alpha\beta=-c\cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\cdots\cdots②$から，①と合わせて，

$$ba_{n+1}+ca_n=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$
$$=\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\beta^{n+1}-(\alpha^n\beta+\alpha\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}$$

よって，$a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n\cdots\cdots③$が成立する。

(2)　a_n がすべて整数のとき，①②から，$a_1=\alpha^0+\beta^0=2$，$a_2=\alpha^1+\beta^1=b$

これより b は整数となり，③から，$a_3=ba_2+ca_1$，$a_4=ba_3+ca_2$ となり，

$$2c=a_3-ba_2\cdots\cdots\cdots④,\ \ bc=a_4-ba_3\cdots\cdots\cdots⑤$$

また，①②から $a_3=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=b^2+2c$ となり，③から，

$$a_5=ba_4+ca_3\,,\ \ (b^2+2c)c=a_5-ba_4\cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤⑥より，$2c$，bc，$(b^2+2c)c$ はすべて整数である。

さて，$2c$ が整数より，k を整数として $c=\dfrac{k}{2}$ とおくことができる。

ここで，k が奇数と仮定すると，$bc=\dfrac{bk}{2}$ が整数より b は偶数となる。

ところが，$(b^2+2c)c=\dfrac{(b^2+k)k}{2}$ は，分子 $(b^2+k)k$ が奇数より，整数ではない。

したがって，k は奇数ではなく偶数となり，c も整数である。

逆に，b, c がともに整数であるとき，$a_1=2$，$a_2=b$ はともに整数であり，③から，帰納的に a_n $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ はすべて整数となる。

以上より，a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。

［解 説］

隣接 3 項間型の漸化式が題材となっている証明問題です。(2)の設問は，見かけよりは難しめで，詰めに時間がかかりました。

7　［東京大・理］

(1)　$p_1=1$，$p_2=2$，$p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ に対して，$a_n=\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ とおくと，

$$a_{n+1}=\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}}+\frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}+\frac{1}{p_{n+2}p_{n+1}}$$

$$=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+1}p_n}+\frac{p_{n+1}p_n}{{p_{n+1}}^2+1}+\frac{p_n}{p_{n+1}({p_{n+1}}^2+1)}$$

$$=\frac{({p_{n+1}}^2+1)^2+{p_{n+1}}^2{p_n}^2+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n({p_{n+1}}^2+1)}=\frac{({p_{n+1}}^2+1)+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n}=a_n$$

これより，$a_n=a_1=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot1}=3$ となり，$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=3$ ………①

(2)　すべての自然数 n に対し，$0<p_n<p_{n+1}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$p_1=1$，$p_2=2$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$0<p_k<p_{k+1}$ すなわち $\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ と仮定すると，

条件式より，$p_{k+2}=\dfrac{{p_{k+1}}^2+1}{p_k}>\dfrac{{p_{k+1}}^2}{p_k}$ から，$\dfrac{p_{k+2}}{p_{k+1}}>\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ となる。

(i)(ii)より，$0<p_n<p_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

さて，①より，${p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1=3p_{n+1}p_n$ ………②

${p_n}^2+{p_{n-1}}^2+1=3p_np_{n-1}$ $(n\geqq2)$ ………③

②－③より，${p_{n+1}}^2-{p_{n-1}}^2=3p_n(p_{n+1}-p_{n-1})$

すると，$p_{n-1}<p_n<p_{n+1}$ より，$p_{n+1}-p_{n-1}>0$ なので，

$p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

(3)　(2)より，$p_1=1$，$p_2=2$，$p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ここで，$q_1=1$，$q_2=1$，$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる q_n に対して，$p_n=q_{2n-1}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　$p_1=q_1$，$q_3=q_2+q_1=2$ から $p_2=q_3$ となり成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき　$p_k=q_{2k-1}$，$p_{k+1}=q_{2k+1}$ と仮定する。

このとき，$p_{k+2}=3p_{k+1}-p_k=3q_{2k+1}-q_{2k-1}$ となり，

$$q_{2k+3}=q_{2k+2}+q_{2k+1}=q_{2k+1}+q_{2k}+q_{2k+1}=2q_{2k+1}+q_{2k}$$

$$=2q_{2k+1}+(q_{2k+1}-q_{2k-1})=3q_{2k+1}-q_{2k-1}$$

(i)(ii)より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ。

［解 説］

複雑な漸化式ですが，誘導に従うと道筋が見えてくるタイプです。