1　　　　　　［大阪大・文］

平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある。2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し，AP＝AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる。また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△AQR の面積を $\theta=\angle\mathrm{PAB}$ を用いて表せ。

(2)　点 P を動かして△AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ。

2　　［北海道大・文］

平面において，一直線上にない 3 点 O，A，B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi-\alpha$ であることを示せ。

(3)　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ。

$\boxed{3}$ ［一橋大］

　xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

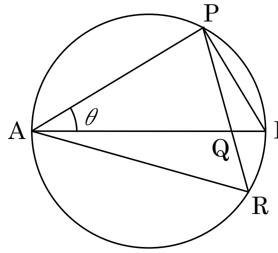
(1)　線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2)　線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

4　　［京都大・文］

xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・文］



(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき, AB が直径なので $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ より,

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cos\theta=2\cos\theta$$

すると，条件より，$\mathrm{AQ}=2\cos\theta$，$\mathrm{BQ}=2-2\cos\theta$

また，$\angle\mathrm{AQP}=\dfrac{1}{2}(\pi-\theta)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$ から,

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{AQ}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=4\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

ここで，方べきの定理より，$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RQ}=\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{BQ}$ となり,

$$4\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathrm{RQ}=2\cos\theta(2-2\cos\theta),\quad \mathrm{RQ}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2}$$

そこで，$\triangle\mathrm{AQR}$ の面積を S とすると，$\angle\mathrm{AQR}=\pi-\angle\mathrm{AQP}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$ より,

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cos\theta\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$$

(2)　(1)より, S が最大になるのは，$\sin2\theta=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときである。

このとき，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=4\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{8}:2\sin\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}:1$ となり，点 R は線分 PQ を $(\sqrt{2}+1):1$ に外分することより,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\sqrt{2}+1)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(\sqrt{2}+1)-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

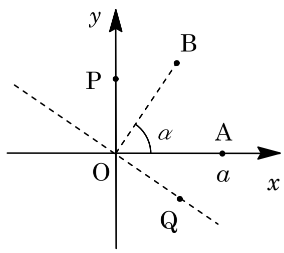
また，$\mathrm{AQ}=2\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

［解 説］

よく見かける構図の三角関数の図形への応用問題です。上記以外にも，いろいろな解法が考えられます。たとえば，点 A を原点，点 B を x 軸上の点として xy 平面で，ということも脳裏に浮かびましたが，計算量を考えて……。

$\boxed{2}$ ［北海道大・文］



(1)　まず，$a>0$，$r>0$，$0<\alpha<\pi$ として，xy 平面上で，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=r(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ とおく。

すると，条件より，$p\neq 0$，$q\neq 0$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ p),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q(\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直なので，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(q\sin\alpha,\ p-q\cos\alpha)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(r\cos\alpha-a,\ r\sin\alpha)$ から，

$$q\sin\alpha(r\cos\alpha-a)+(p-q\cos\alpha)r\sin\alpha=0$$

$\sin\alpha>0$ より，$q(r\cos\alpha-a)+r(p-q\cos\alpha)=0$，$pr-aq=0\cdots\cdots\cdots(*)$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=pr\sin\alpha$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=aq\sin\alpha$ なので，$(*)$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を $\beta\ (0<\beta<\pi)$ とおくと，$\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\dfrac{-pq\cos\alpha}{|p||q|}$

ここで，$(*)$から p と q は同符号なので，$|p||q|=|pq|=pq$ となり，

$$\cos\beta=\frac{-pq\cos\alpha}{pq}=-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{2}<\pi-\alpha<\pi$ となるので，$\beta=\pi-\alpha$ である。

(3)　$(*)$より，$pr=aq$ となり，$r|p|=a|q|$ である。

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ から，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ となる。

［解　説］

まず，2 つの垂直関係から，座標の設定という方法を考えました。しかし，(1)を解くと，その考え方を採用するほどでもないことがわかり，それで押し通そうとも思ったのですが，(3)で暗雲が漂いはじめました。ということで，リセットして……。

$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

(1)　原点が中心で xy 平面上の半径 1 の円周上の点 P は，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ と表せる。ただし $0\leqq\theta<2\pi$ である。また，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ が中心で xz 平面上の半径 1 の円周上の点 Q は，$\mathrm{Q}(\cos\varphi,\ 0,\ \sqrt{3}+\sin\varphi)$ と表せる。ただし $0\leqq\varphi<2\pi$ である。

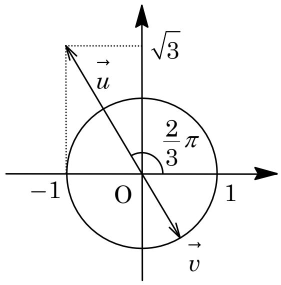
$$\mathrm{PQ}^2=(\cos\theta-\cos\varphi)^2+\sin^2\theta+(\sqrt{3}+\sin\varphi)^2$$
$$=1-2\cos\theta\cos\varphi+1+3+2\sqrt{3}\sin\varphi=-2\cos\theta\cos\varphi+2\sqrt{3}\sin\varphi+5$$

ここで，$\vec{u}=(-\cos\theta,\ \sqrt{3})$，$\vec{v}=(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とおくと，

$$\mathrm{PQ}^2=2\vec{u}\cdot\vec{v}+5$$

さて，まず θ を $0\leqq\theta<2\pi$ で固定して考えると，線分 PQ の長さが最小となるのは，$\vec{v}$ が $\vec{u}$ と逆向きになるときである。このとき PQ^2 の最小値は，

$$2\sqrt{\cos^2\theta+3}\cdot1\cdot\cos\pi+5=-2\sqrt{\cos^2\theta+3}+5$$



さらに，$0\leqq\cos^2\theta\leqq1$ から，$\cos\theta=\pm1$ のとき，PQ^2 は最小値 $-2\sqrt{1+3}+5=1$，すなわち PQ は最小値 1 をとる。

(i)　$\cos\theta=1\ (\theta=0)$ のとき

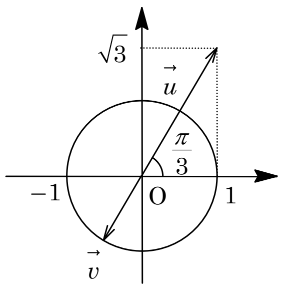
$\vec{u}=(-1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi=\frac{2}{3}\pi+\pi=\frac{5}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\Big(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

(ii)　$\cos\theta=-1\ (\theta=\pi)$ のとき

$\vec{u}=(1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\Big(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$



(2)　(1)より，線分 PQ の長さが最大となるのは，$\vec{v}$ が $\vec{u}$ と同じ向きになるときである。このとき PQ^2 の最大値は，

$$2\sqrt{\cos^2\theta+3}\cdot1\cdot\cos0+5=2\sqrt{\cos^2\theta+3}+5$$

さらに $\cos\theta=\pm1$ のとき，PQ^2 は最大値 $2\sqrt{1+3}+5=9$，PQ は最大値 3 をとる。

(i)　$\cos\theta=1\ (\theta=0)$ のとき　$\vec{u}=(-1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi=\frac{2}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\Big(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\Big)$$

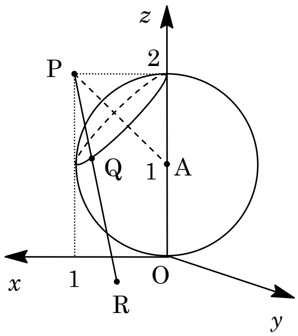
(ii)　$\cos\theta=-1\ (\theta=\pi)$ のとき　$\vec{u}=(1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi=\frac{\pi}{3}$ となるので，

$$\mathrm{P}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\Big(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\Big)$$

［解　説］

1 文字固定の最大・最小問題です。内積の定義を利用して，図で考えています。

４　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・文］



中心を $A(0,\ 0,\ 1)$ とする半径 1 の球面 S 上にあり，点 $(0,\ 0,\ 2)$ 以外を動く点 Q に対し，点 $P(1,\ 0,\ 2)$ と点 Q を結ぶ直線 l が平面 $z=0$ と交わる点を $R(x,\ y,\ 0)$ とおく。

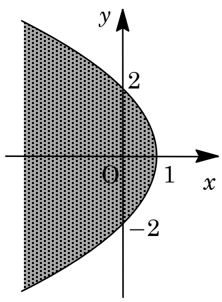
そして，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を θ とし，直線 l が球面 S に接するとき，$\theta=45^\circ$ であることに注目すると，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PR}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PR}|\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PR}|\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{PA}=(-1,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{PR}=(x-1,\ y,\ -2)$ から，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PR}=-(x-1)+2=-x+3,\ |\overrightarrow{PA}|=\sqrt{(-1)^2+0+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2x+5}$$



①に代入すると，$-x+3=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2-2x+5}$ となり，$x\leqq 3$ のもとで，

$$(-x+3)^2=x^2+y^2-2x+5,\ x=-\frac{1}{4}y^2+1\cdots\cdots\cdots②$$

②は $x\leqq 3$ を満たし，点 Q が球面 S 上を動くとき，点 R の動く範囲は，②を境界線とし原点を含む側である。

図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

［解　説］

20 年以上も前になりますが，そのころ頻出していた点光源の問題です。内積を用いて円錐側面の式を立て，境界線を導いています。この方法の詳細は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。