

1

[北海道大]

a は実数とし, 2 つの曲線 $C_1: y = (x-1)e^x$, $C_2: y = \frac{1}{2e}x^2 + a$ がある。ただし, e は自然対数の底である。 C_1 上の点 $(t, (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする。

- (1) a を t で表せ。
- (2) t が実数全体を動くとき, a の極小値, およびそのときの t の値を求めよ。

2

[京都大]

- (1) a を実数とするとき、 $(a, 0)$ を通り、 $y = e^x + 1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ。
- (2) $a_1 = 1$ として、 $n = 1, 2, \dots$ について、 $(a_n, 0)$ を通り、 $y = e^x + 1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$ を求めよ。

3

[東京工大]

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t ($t > 0$) における座標 (x, y) が, $x = t^2 \cos t$, $y = t^2 \sin t$ で表されている。原点を O とし, 時刻 t における P の速度ベクトルを \vec{v} とする。

- (1) \overrightarrow{OP} と \vec{v} とのなす角を $\theta(t)$ とするとき, 極限值 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$ を求めよ。
- (2) \vec{v} が y 軸に平行になるような t ($t > 0$) のうち, 最も小さいものを t_1 , 次に小さいものを t_2 とする。このとき, 不等式 $t_2 - t_1 < \pi$ を示せ。

4

[名古屋大]

次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = x^{-2}2^x$ ($x \neq 0$) について、 $f'(x) > 0$ となるための x に関する条件を求めよ。
- (2) 方程式 $2^x = x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。
- (3) 方程式 $2^x = x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。

1

[北海道大]

(1) $C_1 : y = (x-1)e^x \cdots \cdots \textcircled{1}$, $C_2 : y = \frac{1}{2e}x^2 + a \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して,

①より, $y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ となり, 点 $(t, (t-1)e^t)$ における接線 l は,

$$y - (t-1)e^t = te^t(x-t), \quad y = te^tx - (t^2 - t + 1)e^t \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて, ②③を連立すると, $\frac{1}{2e}x^2 + a = te^tx - (t^2 - t + 1)e^t$

$$\frac{1}{2e}x^2 - te^tx + a + (t^2 - t + 1)e^t = 0$$

C_2 と l が接することより, $D = t^2e^{2t} - 4 \cdot \frac{1}{2e} \{a + (t^2 - t + 1)e^t\} = 0$ となり,

$$t^2e^{2t+1} - 2a - 2(t^2 - t + 1)e^t = 0, \quad a = \frac{1}{2}t^2e^{2t+1} - (t^2 - t + 1)e^t \cdots \cdots \textcircled{4}$$

(2) $f(t) = \frac{1}{2}t^2e^{2t+1} - (t^2 - t + 1)e^t$ とおくと, ④より, $a = f(t)$ となり,

$$\begin{aligned} f'(t) &= te^{2t+1} + t^2e^{2t+1} - (2t-1)e^t - (t^2 - t + 1)e^t \\ &= (t+t^2)e^{2t+1} - (t^2+t)e^t \\ &= t(t+1)e^t(e^{t+1} - 1) \end{aligned}$$

ここで, $f'(t) = 0$ の解は $t = -1, 0$ より, $f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	...	-1	...	0	...
$f'(t)$	-	0	-	0	+
$f(t)$		↘		↘	

すると, $t = 0$ のとき $f(t)$ すなわち a は, 極小値 $f(0) = -1$ をとる。

[解説]

微分法の基本問題です。(1)の結論がややこしい形をしており, 微分するには心が重かったのですが, 杞憂に終わりました。

2

[京都大]

(1) $y = e^x + 1$ に対して, $y' = e^x$ となり, 点 $(t, e^t + 1)$ における接線の方程式は,

$$y - (e^t + 1) = e^t(x - t), \quad y = e^t x - (t - 1)e^t + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①が $(a, 0)$ を通ることより, $e^t a - (t - 1)e^t + 1 = 0$ となり,

$$e^t a = (t - 1)e^t - 1, \quad a = -e^{-t} + t - 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで, $f(t) = -e^{-t} + t - 1$ とおくと, $f'(t) = e^{-t} + 1 > 0$ となり,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t} + t - 1) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-e^{-t} + t - 1) = -\infty$$

よって, $f(t)$ は単調増加し, 任意の実数値をとり得る。

すなわち, 方程式②は任意の a に対してただ 1 つの実数解をもつことより, 点 $(a, 0)$ を通る接線①は, ただ 1 つ存在する。

(2) 条件を②に適用すると, $a_n = -e^{-a_{n+1}} + a_{n+1} - 1$ となり,

$$a_{n+1} - a_n = e^{-a_{n+1}} + 1 > 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

すると, $a_1 = 1$ から, $a_n > 1 + (n - 1) \cdot 1 = n \quad (n \geq 2)$

よって, $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow \infty$ となるので, ③より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-a_{n+1}} + 1) = 1$$

[解説]

頻出の接線の本数の問題です。(2)では, $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow \infty$ であることを示すのがポイントです。③の不等号に気づくかどうかだけです。

3

[東京工大]

- (1)
- $P(x, y)$
- に対して,
- $x = t^2 \cos t$
- ,
- $y = t^2 \sin t$
- より,
- $\overline{OP} = t^2(\cos t, \sin t)$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \cos t - t^2 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t \sin t + t^2 \cos t$$

これより, $\vec{v} = t(2\cos t - t\sin t, 2\sin t + t\cos t)$ となる。

$$\text{ここで, } \overline{OP} \cdot \vec{v} = t^3(2\cos^2 t - t\cos t \sin t + 2\sin^2 t + t\sin t \cos t) = 2t^3$$

$$|\overline{OP}| = t^2, \quad |\vec{v}| = t\sqrt{(2\cos t - t\sin t)^2 + (2\sin t + t\cos t)^2} = t\sqrt{t^2 + 4}$$

そこで, \overline{OP} と \vec{v} とのなす角を $\theta(t)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると,

$$\cos \theta(t) = \frac{\overline{OP} \cdot \vec{v}}{|\overline{OP}| |\vec{v}|} = \frac{2t^3}{t^3 \sqrt{t^2 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 4}}$$

よって, $t \rightarrow \infty$ のとき $\cos \theta(t) \rightarrow 0$ より, $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \frac{\pi}{2}$ である。

- (2)
- $t > 0$
- において,
- \vec{v}
- が
- y
- 軸に平行なのは,
- $\frac{dx}{dt} = 0$
- から
- $2\cos t - t\sin t = 0$

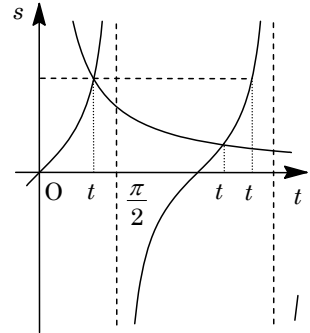
すなわち, $2\cos t = t\sin t$ から, $\cos t \neq 0$ となり,

$$\tan t = \frac{2}{t} \cdots \cdots (*)$$

さて, (*) の解は, $s = \tan t$ と $s = \frac{2}{t}$ の交点の t 座標として表せる。そして, 正で最も小さいものを t_1 , 次に小さいものを t_2 とすると右図のようになる。

ここで, $t_3 = t_1 + \pi$ とおくと, $t_2 < t_3$ となるので,

$$t_2 - t_1 < t_3 - t_1 = \pi$$



[解説]

速度ベクトルが題材の基本的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが, いちばん感覚的に理解できるもので記載しました。

4

[名古屋大]

(1) $f(x) = x^{-2}2^x = \frac{2^x}{x^2}$ に対して,

$$f'(x) = \frac{2^x \log 2 \cdot x^2 - 2^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{2^x(x \log 2 - 2)}{x^3} = \frac{2^x}{x^2} \cdot \frac{x \log 2 - 2}{x}$$

これより、 $f'(x) > 0$ となる条件は、 $\frac{x \log 2 - 2}{x} > 0$ すなわち $x(x \log 2 - 2) > 0$ から、 $x < 0$ 、 $\frac{2}{\log 2} < x$ である。

(2) $x = 0$ は方程式 $2^x = x^2$ を満たさないのに、この方程式は、 $x^{-2}2^x = 1$ すなわち $f(x) = 1$ と同値である。

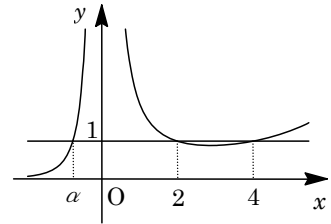
さて、 $f(x)$ の増減は右表のようになり、

x	...	0	...	$\frac{2}{\log 2}$...
$f'(x)$	+	×	-	0	+
$f(x)$	↗	×	↘		↗

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

さらに、 $f(2) = f(4) = 1$ に注意して、 $y = f(x)$ と $y = 1$ のグラフをかくと右図のようになる。

したがって、 $f(x) = 1$ すなわち $2^x = x^2$ は、相異なる 3 個の実数解 $x = \alpha, 2, 4$ をもつ。



(3) まず、方程式 $2^x = x^2$ の解 $x = 2, 4$ は有理数なので、もう 1 つの負の解 $x = \alpha$ について有理数かどうかを調べる。

そこで、 α が有理数と仮定し、 $\alpha = -\frac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数) とおくと、

$$2^{-\frac{n}{m}} = \left(-\frac{n}{m}\right)^2, \quad 2^{-n} = \left(\frac{n^2}{m^2}\right)^m, \quad \frac{1}{2^n} = \frac{n^{2m}}{m^{2m}}$$

$$m, n \text{ は互いに素より, } n^{2m} = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad m^{2m} = 2^n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より $n = 1$ となり、②に代入すると $m^{2m} = 2$ であるが、この式を満たす自然数 m は存在しない。これより、 α は有理数でない。

以上より、方程式 $2^x = x^2$ の解で有理数であるものは $x = 2, 4$ である。

[解説]

微分の応用に関する問題です。(2)は(1)を誘導とした解法ですが、これを無視して直接的に $y = 2^x$ と $y = x^2$ のグラフを描くことによって示しても構いません。実際、 $x = 2, 4$ という解はこちらの方法で見つけていますので。