$\boxed{5}$ ［千葉大・文］

座標平面上に 5 点 $A(0,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(1,\ 1)$, $D(1,\ 0)$, $E\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$がある。点 E と点 $P_1(s,\ 1)$ $(0<s<1)$ を通る直線を l_1 とする。直線 $y=1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし, l_2 と直線 $x=1$ の交点を P_2 とする。さらに, 直線 $x=1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は, x 軸と線分 AD 上で交わるとし, その交点を P_3 とする。

(1) 直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2) 線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。

(3) $EP_1+P_1P_2+P_2P_3$ の最大値と最小値を求めよ。

6　　　　［東京大・文］

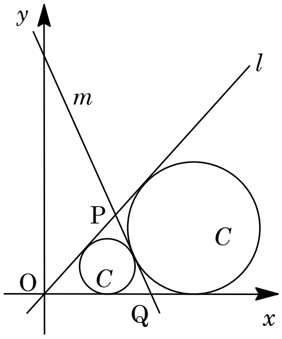
座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-1$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

8　　［筑波大・理］



xy 平面の直線 $y=(\tan 2\theta)x$ を l とする。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。図で示すように，円 C_1，C_2 を以下の(i)～(iv)で定める。

(i)　円 C_1 は直線 l および x 軸の正の部分と接する。

(ii)　円 C_1 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。

(iii) 円 C_2 は直線 l，x 軸の正の部分，および円 C_1 と接する。

(iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1>d_2$ を満たす。

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，x 軸，直線 l と異なる直線を m とし，直線 m と直線 l，x 軸との交点をそれぞれ P, Q とする。

(1)　円 C_1，C_2 の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

(3)　(2)の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。

9　　　　［東京工大］

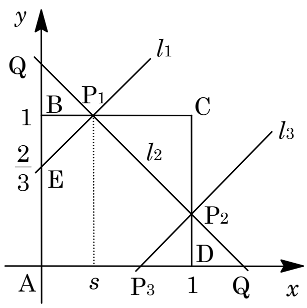
水平な平面αの上に半径r_1の球S_1と半径r_2の球S_2が乗っており，S_1とS_2は外接している。

(1)　S_1，S_2がαと接する点をそれぞれP_1，P_2とする。線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$の長さを求めよ。

(2)　αの上に乗っており，S_1とS_2の両方に外接している球すべてを考える。それらの球とαの接点は，1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ。

$\boxed{5}$　　　　［千葉大・文］

(1)　点 $\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ と点 $\mathrm{P}_1(s,\ 1)\ (0<s<1)$ を通る直線 l_1 を，$y=1$ に関して対称移動した直線を l_2 とする。



すると，l_2 は P_1 と E を $y=1$ に関して対称移動した点 $\mathrm{Q}_1\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ を通ることより，その傾きが $-\dfrac{1}{3s}$ となり，

$$l_2: y=-\frac{1}{3s}x+\frac{4}{3}$$

l_2 が $\mathrm{D}(1,\ 0)$ を通るとき，$0=-\dfrac{1}{3s}+\dfrac{4}{3}$ から，$s=\dfrac{1}{4}$

(2)　l_2 と x 軸との交点 Q_2 は，$0=-\dfrac{1}{3s}x+\dfrac{4}{3}$ から $x=4s$ となり，$\mathrm{Q}_2(4s,\ 0)$ から，

$$\mathrm{DP}_3=\mathrm{DQ}_2=4s-1\ \cdots\cdots\cdots①$$

(3)　P_3 は線分 AD 上にあることから，①より $0\leqq 4s-1\leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{4}\leqq s\leqq\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$

このとき，P_2 は線分 CD 上にある。そこで，$\mathrm{EP}_1=\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3=\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$ から，$F=\mathrm{EP}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ とおくと，

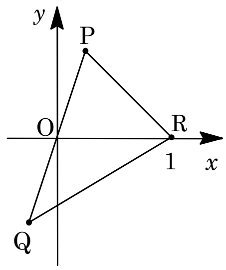
$$F=\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2=\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2=\sqrt{(4s)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{9s^2+1}$$

すると，②より $\dfrac{25}{16}\leqq 9s^2+1\leqq\dfrac{13}{4}$ となるので，F の最大値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{13}$，最小値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{3}$ である。

［解　説］

折れ線の長さの和に関する問題です。線対称移動がポイントですが，その誘導は問題文中に示されています。

$\boxed{6}$　　［東京大・文］



3点 $P(x,\ y)$，$Q(-x,\ -y)$，$R(1,\ 0)$ に対し，

$$\overrightarrow{QP}=2(x,\ y),\ \overrightarrow{RP}=(x-1,\ y),\ \overrightarrow{RQ}=-(x+1,\ y)$$

条件より，$\triangle PQR$ は鋭角三角形なので，まず $\overrightarrow{QP}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{RP}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{RQ}\neq\vec{0}$ となり，

$$(x,\ y)\neq(0,\ 0),\ (x,\ y)\neq(1,\ 0),\ (x,\ y)\neq(-1,\ 0)$$

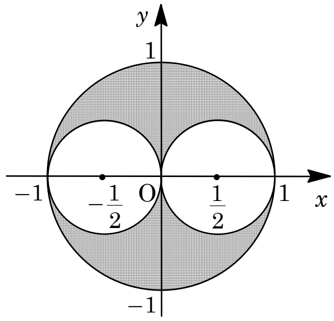
この条件のもとで，$\angle RPQ<90^\circ$ から，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}>0$ すなわち $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{RP}>0$ となり，

$$x(x-1)+y^2>0,\ x^2+y^2-x>0,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\cdots\cdots\text{①}$$

また，$\angle PQR<90^\circ$ から，$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}>0$ すなわち $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{RQ}<0$ となり，

$$-x(x+1)-y^2<0,\ x^2+y^2+x>0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\cdots\cdots\text{②}$$



さらに，$\angle PRQ<90^\circ$ から，$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}>0$ となり，

$$-(x-1)(x+1)-y^2>0,\ x^2+y^2-1<0$$

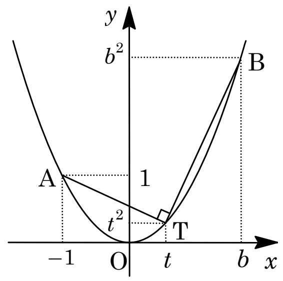
$$x^2+y^2<1\cdots\cdots\text{③}$$

①②③より，点 $P(x,\ y)$ の範囲は右図の網点部である。ただし，境界は含まない。なお，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を除く条件は満たされている。

［解　説］

点と座標に関する基本問題です。解答例ではベクトルを利用していますが，余弦定理の適用でも構いません。

$\boxed{7}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］



$\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{T}(t,\ t^2)\ (-1<t<b)$に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(t+1,\ t^2-1)=(t+1)(1,\ t-1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，あるtに対して，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BT}}$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BT}}=0,\ 1+(t-1)(t+b)=0$$

$$t^2+(b-1)t-b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$(*)$を満たすtが$-1<t<b$に少なくとも1つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-1)t-b+1=\left(t+\dfrac{b-1}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+2b-3}{4}$とおくと，

$$f(-1)=-2b+3,\ f(b)=2b^2-2b+1=2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

(i)　$-2b+3\geqq 0\ \left(-1<b\leqq\dfrac{3}{2}\right)$のとき

$(*)$を満たす t が$-1<t<b$に少なくとも 1 つ存在する条件は，$f(-1)\geqq 0$かつ$f(b)>0$より，

$$-1<-\frac{b-1}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\ -\frac{b^2+2b-3}{4}\leqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-1<2$となり，$\dfrac{1}{3}<b<3$

②より，$(b+3)(b-1)\geqq 0$となり，$b\leqq -3,\ 1\leqq b$

よって，$-1<b\leqq\dfrac{3}{2}$と合わせると，$1\leqq b\leqq\dfrac{3}{2}$となる。

(ii)　$-2b+3<0\ \left(b>\dfrac{3}{2}\right)$のとき

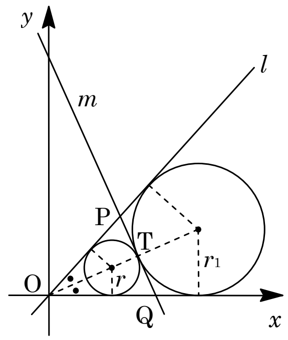
$f(-1)<0$かつ$f(b)>0$より，$(*)$を満たすtが$-1<t<b$に存在する。

(i)(ii)より，求める条件は，$b\geqq 1$である。

［解　説］

図形的な条件を数式化した後は，2 次方程式の解の配置の問題になります。ここでは，$f(b)>0$を見つけることがポイントとなっています。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[筑波大・理]



(1)　円 C_1，C_2 の半径を，それぞれ r_1，r_2 とする。

すると，$d_1=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ から，

$$r_1=d_1\sin\theta=2\sin^2\theta\cos\theta$$

また，$r_2=d_2\sin\theta$，$d_1-d_2=r_1+r_2$ から，

$$2\sin\theta\cos\theta-d_2=2\sin^2\theta\cos\theta+d_2\sin\theta$$

$$(1+\sin\theta)d_2=2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)$$

よって，$d_2=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ となり，

$$r_2=\frac{2\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$$

(2)　円 C_1 と C_2 の接点を T とおくと，$\mathrm{OT}\perp\mathrm{PQ}$ から，

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{OT}\tan\theta=2(d_1-r_1)\tan\theta=2(2\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)\tan\theta$$
$$=4\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)\tan\theta=4\sin^2\theta(1-\sin\theta)$$

ここで，$t=\sin\theta$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ から $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$\mathrm{PQ}=f(t)$ として，

$$f(t)=4t^2(1-t)=4t^2-4t^3$$
$$f'(t)=8t-12t^2=4t(2-3t)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，PQ の最大値は $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=4\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{16}{27}$ である。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

(3)　(2)から，$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ より $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ となり，このとき直線 m の傾きは，

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

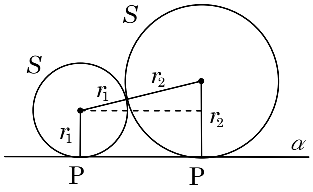
また，$\mathrm{PQ}=\dfrac{16}{27}$ から $\mathrm{TQ}=\dfrac{8}{27}$ となり，$\mathrm{OQ}=\dfrac{\mathrm{TQ}}{\sin\theta}=\dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{9}$ から点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{9},\ 0\right)$ である。すると，直線 m の方程式は，

$$y=-\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x-\frac{4}{9}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{2}{9}\sqrt{5}$$

[解　説]

円と接線の関係をもとに，微分を利用して最大・最小へと繋ぐ問題です。問題文に参考図が書かれているため，解きやすくなっています。

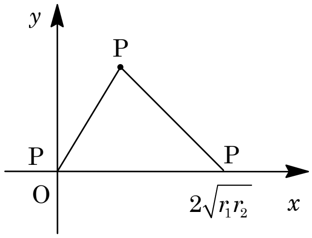
9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］



(1)　球 S_1，S_2 と平面 α の接点 P_1，P_2 を含み，α に垂直な断面を考えると，三平方の定理から，

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-|r_1-r_2|^2}=\sqrt{4r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$$

(2)　S_1 と S_2 の両方に外接している球 S について，半径を r，平面 α との接点を P とする。



ここで，α 上に座標系を設定して，P_1 を原点とし，P_2 を x 軸の正の部分にとると，(1)から $\mathrm{P}_2(2\sqrt{r_1r_2},\ 0)$ となる。そして，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおく。

すると，(1)の結論から，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}=2\sqrt{r_1r}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}=2\sqrt{r_2r}$ となることから，

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{r_1r}\ \cdots\cdots\text{①},\quad \sqrt{(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2}=2\sqrt{r_2r}\ \cdots\cdots\text{②}$$

すると，$x^2+y^2=4r_1r$，$(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2=4r_2r$ となり，r を消去すると，

$$r_2(x^2+y^2)=r_1(x^2-4\sqrt{r_1r_2}\,x+4r_1r_2+y^2)$$
$$(r_2-r_1)x^2+(r_2-r_1)y^2+4r_1\sqrt{r_1r_2}\,x-4r_1^2r_2=0\ \cdots\cdots\text{③}$$

(i)　$r_1=r_2$ のとき

③から，$4r_1^2x-4r_1^3=0$ となり，$x=r_1$

よって，点 P は線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の垂直二等分線上にある。

(ii)　$r_1\neq r_2$ のとき

③から，$x^2+y^2+\dfrac{4r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}x-\dfrac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1}=0$ となり，

$$\left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^3r_2}{(r_2-r_1)^2}+\frac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1},\quad \left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^2r_2^2}{(r_2-r_1)^2}$$

よって，点 P は中心 $\left(-\dfrac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{2r_1r_2}{|r_2-r_1|}$ の円上にある。

［解　説］

外接する球面に関する問題で，ときどき見かけるものです。(2)については，2 つの定点 P_1，P_2 からの距離の条件から，点 P の軌跡は垂直二等分線またはアポロニウスの円というのがわかります。ただ，解答例ではそのプロセスも簡単に記しています。