$\boxed{4}$ ［九州大］

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において, 辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$, $t:1-t$, $1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また, AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下, t は $0<t<t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$, $\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

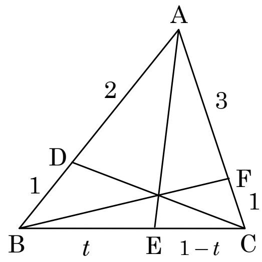
5　　［京都大・理］

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。

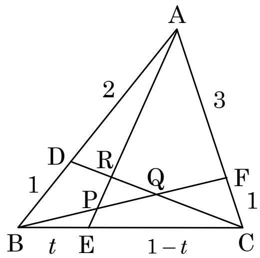
4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］



(1)　$\triangle$ABC　において，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=2:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=t:1-t$，$\mathrm{CF}:\mathrm{FA}=1:3$ であり，$t=t_0$ のとき，AE, BF, CD が 1 点で交わることより，チェバの定理から，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$2t_0=3(1-t_0)$ から，$t_0=\dfrac{3}{5}$ となる。



(2)　条件より，$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ なので，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=k:1-k,\quad \mathrm{CR}:\mathrm{RD}=l:1-l$$

さて，$\triangle$AEC と直線 BF にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$kt=3(1-k)$ より，$k=\dfrac{3}{3+t}$ となる。

また，$\triangle$CDB と直線 AE にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}=1,\quad \frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

すると，$2lt=3(1-l)(1-t)$ より，$(3-t)l=3-3t$，$l=\dfrac{3-3t}{3-t}$ となる。

(3)　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QF}=m:1-m$ とし，$\triangle$BFA と直線 CD にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1,\quad \frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$$

すると，$2m=4(1-m)$ より，$m=\dfrac{2}{3}$ となる。

よって，$\triangle$ABC の面積が 1 から，$\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}$

(4)　(2)から，$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=\dfrac{3}{3+t}:\left(1-\dfrac{3}{3+t}\right)=3:t$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{3}{3+t}\triangle\mathrm{ABE}=\frac{3}{3+t}\cdot t\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3t}{3+t}$$

また，$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=\dfrac{3-3t}{3-t}:\left(1-\dfrac{3-3t}{3-t}\right)=3-3t:2t$ から，

$$\triangle\mathrm{CAR}=\frac{3-3t}{3-3t+2t}\triangle\mathrm{CAD}=\frac{3-3t}{3-t}\cdot\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2-2t}{3-t}$$

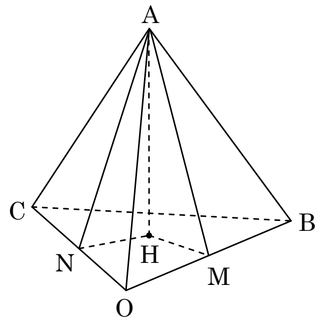
すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{BCQ}-\triangle\mathrm{CAR}-\triangle\mathrm{ABP}$ より，

$$\triangle\mathrm{PQR}=1-\frac{1}{6}-\frac{2-2t}{3-t}-\frac{3t}{3+t}=\frac{25t^2-30t+9}{6(3-t)(3+t)}=\frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

［解 説］

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

$\boxed{5}$ ［京都大・理］



四面体 OABC において，頂点 A から面 OBC に下ろした垂線の足を H，また辺 OB，OC の中点をそれぞれ M，N とおく。

条件より，点 H は△OBC の外心なので，

$$\mathrm{HM} \perp \mathrm{OB} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{HN} \perp \mathrm{OC}$$

すると，AH は面 OBC に垂直で $\mathrm{HM} \perp \mathrm{OB}$ なので，三垂線の定理から，$\mathrm{AM} \perp \mathrm{OB}$ となる。すなわち，△AOB は $\mathrm{AO} = \mathrm{AB}$ の二等辺三角形である。

同様に，AH は面 OBC に垂直で $\mathrm{HN} \perp \mathrm{OC}$ なので，三垂線の定理から，$\mathrm{AN} \perp \mathrm{OC}$ となる。すなわち，△AOC は $\mathrm{AO} = \mathrm{AC}$ の二等辺三角形である。

したがって，$\mathrm{AO} = \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ である。

また，頂点 B から面 OCA に下ろした垂線の足が△OCA の外心なので，同様にすると，$\mathrm{BO} = \mathrm{BC} = \mathrm{BA}$ である。

さらに，頂点 C から面 OAB に下ろした垂線の足が△OAB の外心なので，同様にすると，$\mathrm{CO} = \mathrm{CA} = \mathrm{CB}$ である。

以上より，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ となるので，四面体 OABC は正四面体である。

［解　説］

空間図形の証明問題です。同じ構図の問題で「重心」となっているのが文系で出題されていますが，そこではベクトル利用で解答例をつくりました。それに対して，理系では「外心」ですので，ベクトルでの表現が難しく，ここでは三垂線の定理を適用した解答例にしています。