1　　　　［一橋大］

a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

1　　　　［一橋大］

$f(x)=x^3-3ax$ に対し，$f(-x)=-f(x)$ から，$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$

すると，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値は，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値に等しい。以下，$0\leqq x\leqq 1$ で考える。

さて，$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$ より，

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加し，$|f(x)|$ の最大値 M は,

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a$$

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$1-3a$

(ii)　$a>0$ のとき

$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ となり，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-2a\sqrt{a}$	↗

(ii-i)　$0<\sqrt{a}<1$ $(0<a<1)$ のとき

まず一般的に，X と Y の小さくない方を $\max\{X,\ Y\}$ と表すと，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は,

$$M=\max\{|f(\sqrt{a})|,\ |f(1)|\}=\max\{2a\sqrt{a},\ |1-3a|\}$$

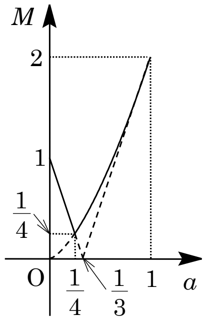
ここで，$2a\sqrt{a}=|1-3a|$ として，両辺を 2 乗すると，

$$4a^3=(1-3a)^2,\ 4a^3-9a^2+6a-1=0$$

すると，$(4a-1)(a-1)^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{4},\ 1$

これより，a と M の関係は右図の実線のようになり，

$$M=1-3a\left(0<a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right)$$



(ii-ii)　$\sqrt{a}\geqq 1$ $(a\geqq 1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調減少し，$|f(x)|$ の最大値 M は,

$$M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a$$

(i)(ii)より，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は,

$$M=1-3a\left(a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right),\ M=-1+3a\ (a\geqq 1)$$

以上より，M は $a=\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

［解　説］

関数の最大・最小に関する有名問題です。まったく同じ問題の演習経験があるかもしれません。なお，ポイントは偶関数に気付くことです。

$\boxed{2}$ ［岡山大］

関数 $f(x)=8x^3-6x-1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3) 不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。

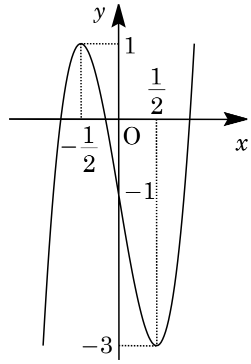
２ ［岡山大］

(1)　$f(x)=8x^3-6x-1$ に対し，

$$f'(x)=24x^2-6=6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と 3 つの共有点をもつ。



したがって，$f(x)=0$ を満たす実数 x は 3 個存在する。

(2)　$\theta=\frac{5}{9}\pi$ とおき，$a=\cos\theta$ のとき，

$$f(a)=8a^3-6a-1=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-1$$
$$=2\cos3\theta-1=2\cos\frac{5\pi}{3}-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

(3)　$\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{9}<\frac{2\pi}{3}$ より，$\cos\frac{\pi}{2}>\cos\frac{5\pi}{9}>\cos\frac{2\pi}{3}$ となり，

$$-\frac{1}{2}<a<0$$

すると，(2)より，a は $f(x)=0$ の 3 つの解のうち，まん中のものであり，

$$f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{8}{125}+\frac{6}{5}-1=\frac{17}{125}>0,\ f\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{27}+1-1=-\frac{1}{27}<0$$

よって，$-\frac{1}{5}<a<-\frac{1}{6}$，すなわち $-\frac{1}{5}<\cos\frac{5\pi}{9}<-\frac{1}{6}$ である。

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。ここでは，余弦の 3 倍角の公式がポイントになっています。

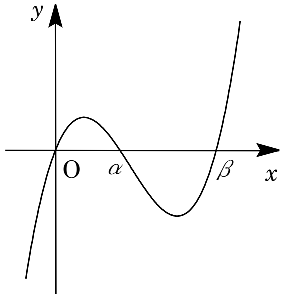
3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・文］

座標平面において，x 軸上に 3 点$(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$$(0<\alpha<\beta)$があり，曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a, b は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2)　β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。

３ ［九州大・文］



(1) 曲線$C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸と 3 点$(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ で交わっているので，C は，

$$y=x(x-\alpha)(x-\beta)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$$

さて，C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とし，$f(x)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$ とおくと，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^\beta -f(x)dx\\&=\int_0^\alpha f(x)dx-\left(\int_0^\beta f(x)dx-\int_0^\alpha f(x)dx\right)\\&=2\int_0^\alpha f(x)dx-\int_0^\beta f(x)dx\\&=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\alpha-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\beta\\&=2\left(\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^4+\alpha^3\beta}{3}+\frac{\alpha^3\beta}{2}\right)-\left(\frac{\beta^4}{4}-\frac{\alpha\beta^3+\beta^4}{3}+\frac{\alpha\beta^3}{2}\right)\\&=-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3\beta+\frac{1}{12}\beta^4-\frac{1}{6}\alpha\beta^3\end{aligned}$$

(2) β の値を固定し，S を α の関数と考え $S(\alpha)$ と記すと，(1)から，

$$S(\alpha)=-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{\beta}{3}\alpha^3-\frac{\beta^3}{6}\alpha+\frac{1}{12}\beta^4\quad(0<\alpha<\beta)$$

$$\begin{aligned}S'(\alpha)&=-\frac{2}{3}\alpha^3+\beta\alpha^2-\frac{\beta^3}{6}=-\frac{1}{6}(4\alpha^3-6\beta\alpha^2+\beta^3)\\&=-\frac{1}{6}(2\alpha-\beta)(2\alpha^2-2\beta\alpha-\beta^2)\end{aligned}$$

すると，$\alpha=\dfrac{\beta}{2}$，$\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\beta$ のとき $S'(\alpha)=0$ となり，$0<\alpha<\beta$ における $S(\alpha)$ の増減は右表のようになる。

α	0	$\cdots$	$\dfrac{\beta}{2}$	$\cdots$	β
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$S(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$\alpha=\dfrac{\beta}{2}$ のとき，S は最小となる。

［解 説］

定積分と面積についての基本問題です。ただ，(2)の結論は感覚的にわかりますが。

$\boxed{4}$　　［大阪大・文］

曲線$C : y=\left|\dfrac{1}{2}x^2-6\right|-2x$を考える。

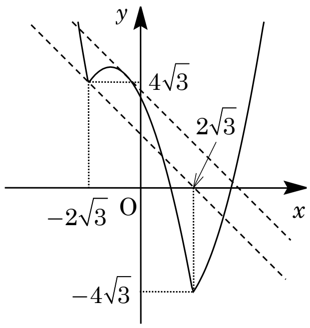
(1)　Cと直線$L : y=-x+t$が異なる 4 点で交わるようなtの値の範囲を求めよ。

(2)　CとLが異なる 4 点で交わるとし，その交点をx座標が小さいものから順に，P_1，P_2，P_3，P_4とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|+|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}|}=4$となるような$t$の値を求めよ。

(3)　tが(2)の値をとるとき，Cと線分$\mathrm{P_2P_3}$で囲まれる図形の面積を求めよ。

4　　［大阪大・文］

(1)　曲線 $C : y=\left|\dfrac{1}{2}x^2-6\right|-2x$ に対して,



(i)　$\dfrac{1}{2}x^2-6\geqq 0$ $(x\leqq -2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\leqq x)$ のとき

$$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6=\frac{1}{2}(x-2)^2-8\cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}x^2-6<0$ $(-2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3})$ のとき

$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+6=-\frac{1}{2}(x+2)^2+8\cdots\cdots\cdots②$$

さて, 直線 $L : y=-x+t$ ……③が点 $(-2\sqrt{3},\ 4\sqrt{3})$ を通るとき, $t=-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ となる。

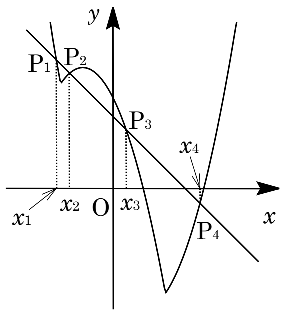
また, L が放物線②と $x=s$ で接するとき, ②から $y'=-x-2$ なので,

$$-s-2=-1,\ s=-1$$

すると, 接点 $\left(-1,\ \dfrac{15}{2}\right)$ となり, このとき $t=-1+\dfrac{15}{2}=\dfrac{13}{2}$ である。

以上より, C と L が異なる 4 点で交わる t の範囲は, $2\sqrt{3}<t<\dfrac{13}{2}$ である。

(2)　C と L が異なる 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 で交わるとき, その x 座標をそれぞれ x_1, x_2, x_3, x_4 とおく。



まず, ①③を連立して, $\dfrac{1}{2}x^2-2x-6=-x+t$ となり,

$$x^2-2x-2t-12=0$$

この解が $x=x_1$, x_4 より,

$$x_1+x_4=2,\ x_1x_4=-2t-12\cdots\cdots\cdots④$$

次に, ②③を連立して, $-\dfrac{1}{2}x^2-2x+6=-x+t$ となり,

$$x^2+2x+2t-12=0$$

この解が $x=x_2$, x_3 より, $x_2+x_3=-2$, $x_2x_3=2t-12\cdots\cdots\cdots⑤$

すると, L の傾きが -1 から,

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{2}(x_2-x_1),\ \left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|=\sqrt{2}(x_4-x_3),\ \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|=\sqrt{2}(x_3-x_2)$$

ここで, 条件より, $\dfrac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|+\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|}{\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|}=4$ なので, $\dfrac{(x_2-x_1)+(x_4-x_3)}{x_3-x_2}=4$

$$x_4-x_1=5(x_3-x_2),\ (x_4-x_1)^2=25(x_3-x_2)^2$$

$$(x_1+x_4)^2-4x_1x_4=25\{(x_2+x_3)^2-4x_2x_3\}$$

④⑤を代入して, $4-4(-2t-12)=25\{4-4(2t-12)\}$ となり,

$$1+2t+12=25(1-2t+12),\ 52t-312=0$$

よって, 求める t の値は, $t=6$ である。

(3)　$t=6$ のとき，$x_2+x_3=-2$，$x_2x_3=0$ より，$(x_2,\ x_3)=(-2,\ 0)$ となる。

このとき，C と線分 $\mathrm{P_2P_3}$ で囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_{-2}^{0}\left\{-\frac{1}{2}x^2-2x+6-(-x+6)\right\}dx=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x(x+2)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(0+2)^3=\frac{2}{3}$$

［解　説］

絶対値つき関数のグラフを題材とした総合問題です。解答例では，C と L をそのまま扱いましたが，曲線 $y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-x$ と直線 $y=t$ という組で処理しても構いません。計算量が少しだけ減少します。

5　　［千葉大・文］

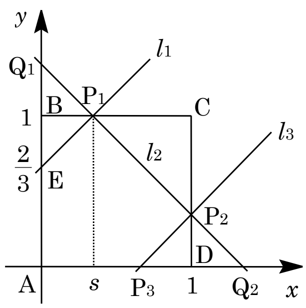
座標平面上に 5 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 1)$，$\mathrm{D}(1,\ 0)$，$\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$がある。点 E と点 $\mathrm{P}_1(s,\ 1)\ (0<s<1)$ を通る直線を l_1 とする。直線 $y=1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし，l_2 と直線 $x=1$ の交点を P_2 とする。さらに，直線 $x=1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は，x 軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を P_3 とする。

(1)　直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2)　線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。

(3)　$\mathrm{EP}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{5}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・文］



(1)　点 $E\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$ と点 $P_1(s,\ 1)\ (0<s<1)$ を通る直線 l_1 を，$y=1$ に関して対称移動した直線を l_2 とする。

すると，l_2 は P_1 と E を $y=1$ に関して対称移動した点 $Q_1\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$ を通ることより，その傾きが $-\frac{1}{3s}$ となり，

$$l_2 : y=-\frac{1}{3s}x+\frac{4}{3}$$

l_2 が $D(1,\ 0)$ を通るとき，$0=-\frac{1}{3s}+\frac{4}{3}$ から，$s=\frac{1}{4}$

(2)　l_2 と x 軸との交点 Q_2 は，$0=-\frac{1}{3s}x+\frac{4}{3}$ から $x=4s$ となり，$Q_2(4s,\ 0)$ から，

$$DP_3=DQ_2=4s-1 \cdots\cdots\cdots ①$$

(3)　P_3 は線分 AD 上にあることから，①より $0\leqq 4s-1\leqq 1$ となり，$\frac{1}{4}\leqq s\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$

このとき，P_2 は線分 CD 上にある。そこで，$EP_1=Q_1P_1$，$P_2P_3=P_2Q_2$ から，$F=EP_1+P_1P_2+P_2P_3$ とおくと，

$$F=Q_1P_1+P_1P_2+P_2Q_2=Q_1Q_2=\sqrt{(4s)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{9s^2+1}$$

すると，②より $\frac{25}{16}\leqq 9s^2+1\leqq\frac{13}{4}$ となるので，F の最大値は $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{2}{3}\sqrt{13}$，最小値は $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{3}$ である。

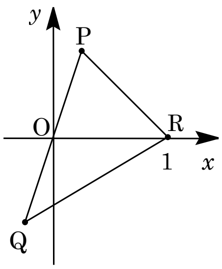
［解　説］

折れ線の長さの和に関する問題です。線対称移動がポイントですが，その誘導は問題文中に示されています。

6　　[東京大・文]

座標平面上の 3 点$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$が鋭角三角形をなすための$(x,\ y)$についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点$\mathrm{P}(x,\ y)$の範囲を図示せよ。

$\boxed{6}$ ［東京大・文］



3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=2(x,\ y),\ \overrightarrow{\mathrm{RP}}=(x-1,\ y),\ \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-(x+1,\ y)$$

条件より，$\triangle\mathrm{PQR}$ は鋭角三角形なので，まず $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\neq\vec{0}$ となり，

$$(x,\ y)\neq(0,\ 0),\ (x,\ y)\neq(1,\ 0),\ (x,\ y)\neq(-1,\ 0)$$

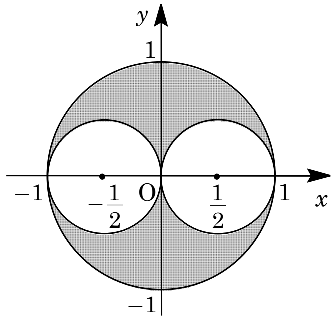
この条件のもとで，$\angle\mathrm{RPQ}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}>0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}>0$ となり，

$$x(x-1)+y^2>0,\ x^2+y^2-x>0,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{PQR}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}>0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}<0$ となり，

$$-x(x+1)-y^2<0,\ x^2+y^2+x>0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots②$$



さらに，$\angle\mathrm{PRQ}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}>0$ となり，

$$-(x-1)(x+1)-y^2>0,\ x^2+y^2-1<0$$

$$x^2+y^2<1\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲は右図の網点部である。ただし，境界は含まない。なお，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を除く条件は満たされている。

［解 説］

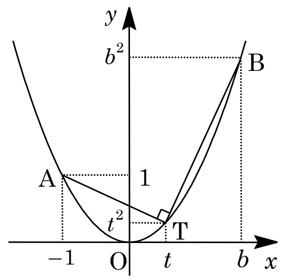
点と座標に関する基本問題です。解答例ではベクトルを利用していますが，余弦定理の適用でも構いません。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-1$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］



$A(-1,\ 1)$，$B(b,\ b^2)$，$T(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ に対し，

$$\overrightarrow{AT}=(t+1,\ t^2-1)=(t+1)(1,\ t-1)$$

$$\overrightarrow{BT}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，ある t に対して，$\overrightarrow{AT}\perp\overrightarrow{BT}$ より，

$$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BT}=0,\ 1+(t-1)(t+b)=0$$

$$t^2+(b-1)t-b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$(*)$を満たす t が $-1<t<b$ に少なくとも 1 つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-1)t-b+1=\left(t+\dfrac{b-1}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+2b-3}{4}$ とおくと，

$$f(-1)=-2b+3,\ f(b)=2b^2-2b+1=2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

(i)　$-2b+3\geqq 0\ \left(-1<b\leqq\dfrac{3}{2}\right)$ のとき

$(*)$を満たす t が $-1<t<b$ に少なくとも 1 つ存在する条件は，$f(-1)\geqq 0$ かつ $f(b)>0$ より，

$$-1<-\frac{b-1}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\ -\frac{b^2+2b-3}{4}\leqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-1<2$ となり，$\dfrac{1}{3}<b<3$

②より，$(b+3)(b-1)\geqq 0$ となり，$b\leqq -3,\ 1\leqq b$

よって，$-1<b\leqq\dfrac{3}{2}$ と合わせると，$1\leqq b\leqq\dfrac{3}{2}$ となる。

(ii)　$-2b+3<0\ \left(b>\dfrac{3}{2}\right)$ のとき

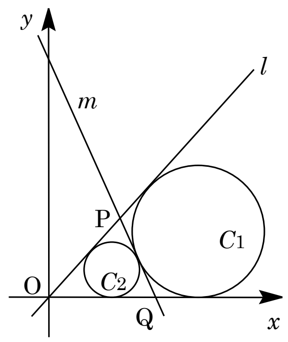
$f(-1)<0$ かつ $f(b)>0$ より，$(*)$を満たす t が $-1<t<b$ に存在する。

(i)(ii)より，求める条件は，$b\geqq 1$ である。

［解　説］

図形的な条件を数式化した後は，2 次方程式の解の配置の問題になります。ここでは，$f(b)>0$ を見つけることがポイントとなっています。

8　　［筑波大・理］



xy 平面の直線 $y=(\tan 2\theta)x$ を l とする。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。図で示すように，円 C_1，C_2 を以下の(i)～(iv)で定める。

(i)　円 C_1 は直線 l および x 軸の正の部分と接する。

(ii)　円 C_1 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。

(iii)　円 C_2 は直線 l，x 軸の正の部分，および円 C_1 と接する。

(iv)　円 C_2 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1>d_2$ を満たす。

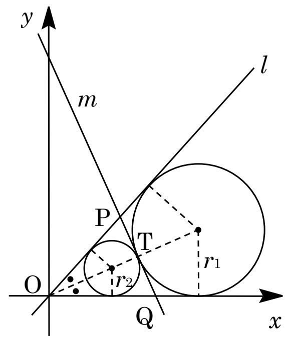
円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，x 軸，直線 l と異なる直線を m とし，直線 m と直線 l，x 軸との交点をそれぞれ P，Q とする。

(1)　円 C_1，C_2 の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

(3)　(2)の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$　　　　［筑波大・理］



(1)　円 C_1，C_2 の半径を，それぞれ r_1，r_2 とする。

すると，$d_1 = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ から，

$$r_1 = d_1\sin\theta = 2\sin^2\theta\cos\theta$$

また，$r_2 = d_2\sin\theta$，$d_1 - d_2 = r_1 + r_2$ から，

$$2\sin\theta\cos\theta - d_2 = 2\sin^2\theta\cos\theta + d_2\sin\theta$$

$$(1+\sin\theta)d_2 = 2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)$$

よって，$d_2 = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ となり，

$$r_2 = \frac{2\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$$

(2)　円 C_1 と C_2 の接点を T とおくと，$\mathrm{OT}\perp\mathrm{PQ}$ から，

$$\mathrm{PQ} = 2\mathrm{OT}\tan\theta = 2(d_1 - r_1)\tan\theta = 2(2\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\tan\theta$$

$$= 4\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)\tan\theta = 4\sin^2\theta(1-\sin\theta)$$

ここで，$t = \sin\theta$ とおくと，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ から $0 < t < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$\mathrm{PQ} = f(t)$ として，

$$f(t) = 4t^2(1-t) = 4t^2 - 4t^3$$

$$f'(t) = 8t - 12t^2 = 4t(2-3t)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，PQ の最大値は $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 4\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{16}{27}$ である。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(3)　(2)から，$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ より $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ となり，このとき直線 m の傾きは，

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

また，$\mathrm{PQ} = \dfrac{16}{27}$ から $\mathrm{TQ} = \dfrac{8}{27}$ となり，$\mathrm{OQ} = \dfrac{\mathrm{TQ}}{\sin\theta} = \dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{4}{9}$ から点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{9},\ 0\right)$ である。すると，直線 m の方程式は，

$$y = -\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x - \frac{4}{9}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{2}{9}\sqrt{5}$$

［解　説］

円と接線の関係をもとに，微分を利用して最大・最小へと繋ぐ問題です。問題文に参考図が書かれているため，解きやすくなっています。

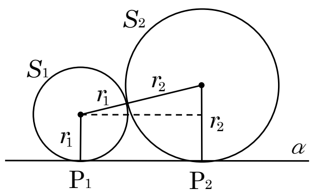
9 ［東京工大］

水平な平面αの上に半径r_1の球S_1と半径r_2の球S_2が乗っており，S_1とS_2は外接している。

(1) S_1，S_2がαと接する点をそれぞれP_1，P_2とする。線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$の長さを求めよ。

(2) αの上に乗っており，S_1とS_2の両方に外接している球すべてを考える。それらの球とαの接点は，1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ。

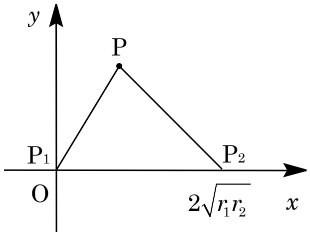
９ ［東京工大］



(1) 球 S_1，S_2 と平面 α の接点 P_1，P_2 を含み，α に垂直な断面を考えると，三平方の定理から，

$$P_1P_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-|r_1-r_2|^2}=\sqrt{4r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$$

(2) S_1 と S_2 の両方に外接している球 S について，半径を r, 平面 α との接点を P とする。



ここで，α 上に座標系を設定して，P_1 を原点とし，P_2 を x 軸の正の部分にとると，(1)から $P_2(2\sqrt{r_1r_2},\ 0)$ となる。そして，$P(x,\ y)$ とおく。

すると，(1)の結論から，$P_1P=2\sqrt{r_1r}$，$P_2P=2\sqrt{r_2r}$ となることから，

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{r_1r}\ \cdots\cdots\text{①},\quad \sqrt{(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2}=2\sqrt{r_2r}\ \cdots\cdots\text{②}$$

すると，$x^2+y^2=4r_1r$，$(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2=4r_2r$ となり，r を消去すると，

$$r_2(x^2+y^2)=r_1(x^2-4\sqrt{r_1r_2}x+4r_1r_2+y^2)$$

$$(r_2-r_1)x^2+(r_2-r_1)y^2+4r_1\sqrt{r_1r_2}x-4r_1^2r_2=0\ \cdots\cdots\text{③}$$

(i) $r_1=r_2$ のとき

③から，$4r_1^2x-4r_1^3=0$ となり，$x=r_1$

よって，点 P は線分 P_1P_2 の垂直二等分線上にある。

(ii) $r_1\neq r_2$ のとき

③から，$x^2+y^2+\dfrac{4r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}x-\dfrac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1}=0$ となり，

$$\left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^3r_2}{(r_2-r_1)^2}+\frac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1},\quad \left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^2r_2^2}{(r_2-r_1)^2}$$

よって，点 P は中心 $\left(-\dfrac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{2r_1r_2}{|r_2-r_1|}$ の円上にある。

［解 説］

外接する球面に関する問題で，ときどき見かけるものです。(2)については，2 つの定点 P_1，P_2 からの距離の条件から，点 P の軌跡は垂直二等分線またはアポロニウスの円というのがわかります。ただ，解答例ではそのプロセスも簡単に記しています。

$\boxed{10}$ ［九州大］

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また，AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

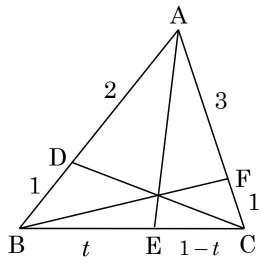
以下，t は $0<t<t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

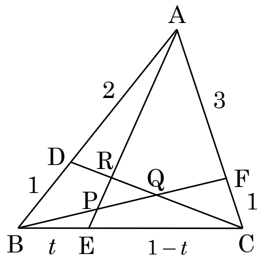
10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］



(1)　$\triangle$ABC において，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=2:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=t:1-t$，$\mathrm{CF}:\mathrm{FA}=1:3$ であり，$t=t_0$ のとき, AE, BF, CD が 1 点で交わることより，チェバの定理から,

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$2t_0=3(1-t_0)$ から，$t_0=\dfrac{3}{5}$ となる。



(2)　条件より，$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ なので,

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=k:1-k,\quad \mathrm{CR}:\mathrm{RD}=l:1-l$$

さて, $\triangle$AEC と直線 BF にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$kt=3(1-k)$ より，$k=\dfrac{3}{3+t}$ となる。

また, $\triangle$CDB と直線 AE にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}=1,\quad \frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

すると，$2lt=3(1-l)(1-t)$ より，$(3-t)l=3-3t$，$l=\dfrac{3-3t}{3-t}$ となる。

(3)　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QF}=m:1-m$ とし, $\triangle$BFA と直線 CD にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1,\quad \frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$$

すると，$2m=4(1-m)$ より，$m=\dfrac{2}{3}$ となる。

よって, $\triangle$ABC の面積が 1 から, $\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}$

(4)　(2)から，$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=\dfrac{3}{3+t}:\left(1-\dfrac{3}{3+t}\right)=3:t$ となり,

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{3}{3+t}\triangle\mathrm{ABE}=\frac{3}{3+t}\cdot t\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3t}{3+t}$$

また，$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=\dfrac{3-3t}{3-t}:\left(1-\dfrac{3-3t}{3-t}\right)=3-3t:2t$ から,

$$\triangle\mathrm{CAR}=\frac{3-3t}{3-3t+2t}\triangle\mathrm{CAD}=\frac{3-3t}{3-t}\cdot\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2-2t}{3-t}$$

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{BCQ}-\triangle\mathrm{CAR}-\triangle\mathrm{ABP}$ より,

$$\triangle\mathrm{PQR}=1-\frac{1}{6}-\frac{2-2t}{3-t}-\frac{3t}{3+t}=\frac{25t^2-30t+9}{6(3-t)(3+t)}=\frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

［解 説］

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

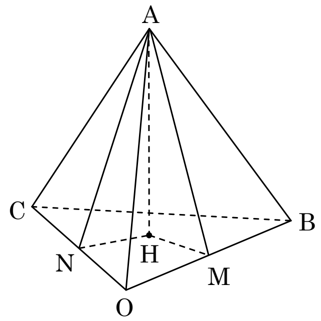
11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。

11　　　　［京都大・理］



四面体 OABC において，頂点 A から面 OBC に下ろした垂線の足を H，また辺 OB，OC の中点をそれぞれ M，N とおく。

条件より，点 H は△OBC の外心なので，

$$\mathrm{HM}\perp\mathrm{OB}\quad かつ\quad \mathrm{HN}\perp\mathrm{OC}$$

すると，AH は面 OBC に垂直で $\mathrm{HM}\perp\mathrm{OB}$ なので，三垂線の定理から，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{OB}$ となる。すなわち，△AOB は $\mathrm{AO}=\mathrm{AB}$ の二等辺三角形である。

同様に，AH は面 OBC に垂直で $\mathrm{HN}\perp\mathrm{OC}$ なので，三垂線の定理から，$\mathrm{AN}\perp\mathrm{OC}$ となる。すなわち，△AOC は $\mathrm{AO}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形である。

したがって，$\mathrm{AO}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である。

また，頂点 B から面 OCA に下ろした垂線の足が△OCA の外心なので，同様にすると，$\mathrm{BO}=\mathrm{BC}=\mathrm{BA}$ である。

さらに，頂点 C から面 OAB に下ろした垂線の足が△OAB の外心なので，同様にすると，$\mathrm{CO}=\mathrm{CA}=\mathrm{CB}$ である。

以上より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となるので，四面体 OABC は正四面体である。

［解　説］

空間図形の証明問題です。同じ構図の問題で「重心」となっているのが文系で出題されていますが，そこではベクトル利用で解答例をつくりました。それに対して，理系では「外心」ですので，ベクトルでの表現が難しく，ここでは三垂線の定理を適用した解答例にしています。

$\boxed{12}$ ［北海道大・文］

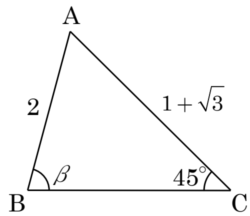
　$\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ を満たすとする。

(1)　$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2)　(1)の β の値をすべて求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

12　　　　［北海道大・文］



(1)　△ABC に正弦定理を適用して，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$ から，

$$\sin\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\Big(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\Big)^2$$

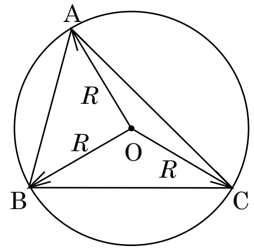
$$=1-\frac{2+\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$2<1+\sqrt{3}$ より $45^\circ<\beta$ であり，しかも $\beta<180^\circ-45^\circ=135^\circ$ から，

$$45^\circ<\beta<135^\circ,\ \ 90^\circ<2\beta<270^\circ$$

すると，(＊)から $2\beta=150^\circ,\ 210^\circ$ なので，$\beta=75^\circ,\ 105^\circ$

(3)　△ABC は鋭角三角形なので，$\beta=75^\circ$ である。



また，O は△ABC の外接円の中心より，

$$\angle\mathrm{AOB}=2\times45^\circ=90^\circ,\ \ \angle\mathrm{AOC}=2\beta=150^\circ$$

$$\angle\mathrm{BOC}=360^\circ-90^\circ-150^\circ=120^\circ$$

さらに，外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=2R,\ \ R=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\sqrt{2})^2\cos 90^\circ=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{2})^2\cos150^\circ=-\sqrt{3},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{2})^2\cos120^\circ=-1$$

さて，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2s,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2t$$

よって，$2s=-\sqrt{3}$，$2t=-1$ となり，$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$t=-\dfrac{1}{2}$

［解 説］

三角比とベクトルの融合問題です。(3)では，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に注目して，内積の値で処理をしました。他にも，ベクトルの大きさに注目する方法が考えられます。

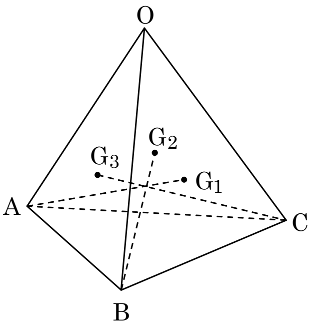
$\boxed{13}$　　［京都大・文］

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。

$\boxed{13}$ ［京都大・文］



まず, 四面体 OABC の面 OBC, 面 OCA, 面 OAB の重心を，それぞれG_1，G_2，G_3とおく。

また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とすると，

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c},$$

すると，$\overrightarrow{AG_1}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}(-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

ここで, 条件より, A から面 OBC に下ろした垂線の足がG_1なので，$\overrightarrow{AG_1}\perp\overrightarrow{OB}$かつ$\overrightarrow{AG_1}\perp\overrightarrow{OC}$となり，

$$\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ -3\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ -3\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0\cdots\cdots\cdots②$$

同様に，$\overrightarrow{BG_2}=\frac{1}{3}(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})$から，$\overrightarrow{BG_2}\perp\overrightarrow{OA}$かつ$\overrightarrow{BG_2}\perp\overrightarrow{OC}$なので，

$$\overrightarrow{BG_2}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ |\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\cdots③$$

$$\overrightarrow{BG_2}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{c}-3\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0\cdots\cdots\cdots④$$

さらに，$\overrightarrow{CG_3}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})$から，$\overrightarrow{CG_3}\perp\overrightarrow{OA}$かつ$\overrightarrow{CG_3}\perp\overrightarrow{OB}$なので，

$$\overrightarrow{CG_3}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ |\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$\overrightarrow{CG_3}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\cdots⑥$$

すると, ①⑥より$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，②④より$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，③⑤より$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$となり，$k$ を定数として，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=k\cdots\cdots\cdots⑦$$

これより，①⑥は$|\vec{b}|^2=2k$，②④は$|\vec{c}|^2=2k$，③⑤は$|\vec{a}|^2=2k$となり，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2k}\cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle BOC$から，⑦⑧を代入すると，$k=(\sqrt{2k})^2\cos\angle BOC$

$$\cos\angle BOC=\frac{1}{2},\ \angle BOC=\frac{\pi}{3}$$

同様にすると，$\angle COA=\angle AOB=\frac{\pi}{3}$となり, 四面体 OABC の面はすべて合同な正三角形である。すなわち, 四面体 OABC は正四面体である。

［解 説］

空間ベクトルの四面体への応用問題です。連立方程式をまとめていくのがポイントです。

14 ［北海道大・文］

x, y を自然数とする。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

$\boxed{14}$ ［北海道大・文］

(1) 自然数 x に対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるためには，$\dfrac{3x}{x^2+2}\geqq 1$ が必要である。

$$3x\geqq x^2+2,\ x^2-3x+2\leqq 0,\ (x-1)(x-2)\leqq 0$$

よって，$1\leqq x\leqq 2$ となり，$x=1$ または $x=2$ である。

(i) $x=1$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{3}{1+2}=1$ となり適する。

(ii) $x=2$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{6}{4+2}=1$ となり適する。

(i)(ii)より，求める x は，$x=1,\ 2$ である。

(2) 自然数 x,y に対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数である条件は，

(i) $y=1$ のとき

$\dfrac{1}{y}=1$ から $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数となることより，(1)の結果から $x=1,\ 2$

(ii) $y\geqq 2$ のとき

$0<\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，(i)より $x\neq 1$，$x\neq 2$ なので，$x\geqq 3$ である。

すると，(1)の結果から $0<\dfrac{3x}{x^2+2}<1$ となり，$0<\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{3}{2}$ から，

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，$\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2}$，$y=\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}$

ここで，$y\geqq 2$ から $\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}\geqq 2$ となり，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$ より，

$$x^2+2\geqq 2(x^2-3x+2),\ x^2-6x+2\leqq 0$$

よって，$3-\sqrt{7}\leqq x\leqq 3+\sqrt{7}$ となり，$x=3$ または $x=4$ または $x=5$

(ii-i) $x=3$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{9}{11}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{11}$ であるので不適。

(ii-ii) $x=4$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ であるので $y=3$。

(ii-iii) $x=5$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{15}{27}=\dfrac{5}{9}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{9}$ であるので不適。

(i)(ii)より，求める $(x,\ y)$ は，$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(4,\ 3)$ である。

［解 説］

値を絞り込むタイプの整数問題です。一見，難問そうに見える(2)では，(1)での考察がたいへん役立っています。なお，記述は省きましたが，方針を立てるとき，x に具体的な数値を入れて計算をしています。

15　［大阪大・文］

次の問いに答えよ。

(1) a を正の実数とし，k を 1 以上の実数とする。x についての 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ は，不等式 $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たすような実数解 s をもつことを示せ。

(2) a を 3 以上の整数とする。n^2+a が $an+1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 n を a を用いて表せ。

$\boxed{15}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・文］

(1) 実数 $a,\ k$ が $a>0$，$k\geqq 1$ のとき，2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ ……①に対して，$f(x)=x^2-kax+a-k$ とおくと，

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}+k+a-k=\frac{1}{a^2}+a>0$$

$$f(1)=1-ka+a-k=(a+1)(1-k)\leqq 0$$

これより，①は $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たす実数解 s をもつ。

(2) 整数 a,n,k は，$a\geqq 3$，$n\geqq 2$，$k\geqq 1$ を満たすとする。

ここで，n^2+a は $an+1$ で割り切れることから，$n^2+a=k(an+1)$ と表せ，

$$n^2-kan+a-k=0 \text{ ………②}$$

すると，②は $f(n)=0$ であり，さらに(1)から $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ なので，①は異なる実数解 $s,\ n\ (s<n)$ をもつことになる。

さて，①について，解と係数の関係から $s+n=ka$ となり，$s=ka-n$ ………③

a,n,k は整数なので，③から s も整数となる。さらに，$a\geqq 3$ から $-\dfrac{1}{3}\leqq -\dfrac{1}{a}<0$ となり，$-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ から $s=0,\ 1$ である。

(i)　$s=0$ のとき　$f(0)=a-k=0$ から $k=a$ となり，③から $n=a^2$

そして，$a^2\geqq 9$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(ii)　$s=1$ のとき　$f(1)=(a+1)(1-k)=0$ から $k=1$ となり，③から $n=a-1$

そして，$a-1\geqq 2$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(i)(ii)より，$n=a^2,\ a-1$ である。

［解　説］

一見，無関係に思える 2 つの小問です。しかし，(2)を解いていくと，この整数問題への誘導として，(1)の 2 次方程式の解の配置についての設問がある，というのに気づきます。

16　　［神戸大・理］

約数, 公約数, 最大公約数を次のように定める。

- 2 つの整数 a, b に対して, $a=bk$ を満たす整数 k が存在するとき, b は a の約数という。
- 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という。
- 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という。

以下の問いに答えよ。

(1)　a, b, c, p は 0 でない整数で $a=pb+c$ を満たしているとする。

(i)　$a=18$，$b=30$，$c=-42$，$p=2$ のとき, a と b の公約数の集合 S, および b と c の公約数の集合 T を求めよ。

(ii)　a と b の最大公約数を M, b と c の最大公約数を N とする。M と N は等しいことを示せ。ただし, a, b, c, p は 0 でない任意の整数とする。

(2)　自然数の列 $\{a_n\}$ を，$a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$a_1=3$，$a_2=4$ で定める。

(i)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(ii)　a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。

(iii)　a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ。

16　　［神戸大・理］

(1)　(i)　$a=18=2\times3^2$ と $b=30=2\times3\times5$ の公約数の集合 S は,

$$S=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$$

また, $b=30=2\times3\times5$ と $c=-42=-2\times3\times7$ の公約数の集合 T は,

$$T=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$$

(ii)　$a,\ b,\ c,\ p$ は 0 でない任意の整数, そして a と b の最大公約数を M, b と c の最大公約数を N とし, $a=pb+c$ ……①を満たしている。

まず, N は b と c の公約数で, ①から N は a の約数でもある。すると, N は a と b の公約数となり, a と b の最大公約数 M と比べると, $N\leqq M$ である。

また, M は a と b の公約数で, ①から $c=a-pb$ となるので, M は c の約数でもある。すると, M は b と c の公約数となり, b と c の最大公約数 N と比べると, $M\leqq N$ である。

したがって, $N\leqq M$ かつ $M\leqq N$ から, $M=N$ である。

(2)　(i)　0 でない任意の整数 l と m に対して, その最大公約数を $G(l,\ m)$ で表す。

さて, $a_1=3$, $a_2=4$, $a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる自然数の列 $\{a_n\}$ に対して, 帰納的に $a_n\neq0$ なので, (1)から $G(a_{n+2},\ a_{n+1})=G(a_{n+1},\ a_n)$

$$G(a_{n+1},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-1})=\cdots=G(a_3,\ a_2)=G(a_2,\ a_1)=G(4,\ 3)=1$$

(ii)　$a_{n+4}=6a_{n+3}+a_{n+2}=6(6a_{n+2}+a_{n+1})+a_{n+2}=37a_{n+2}+6a_{n+1}$

ここで, $6a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$ から,

$$a_{n+4}=37a_{n+2}+(a_{n+2}-a_n)=38a_{n+2}-a_n\ \cdots\cdots\cdots ②$$

(iii)　②に(1)の結果を適用すると, $G(a_{n+4},\ a_{n+2})=G(a_{n+2},\ a_n)$ である。

ここで, $a_3=6a_2+a_1=27$, $a_4=6a_3+a_2=166$ なので,

(a)　n が奇数のとき

$$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_3,\ a_1)=G(27,\ 3)=3$$

(b)　n が偶数のとき

$$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_4,\ a_2)=G(166,\ 4)=2$$

［解　説］

ユークリッドの互除法に関する基本を確認した後, それを漸化式に適用する問題です。細かい誘導のため, 方針に迷いはないでしょう。

17 ［東京大・文］

以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

(1)　3^n を 10 で割った余りを a_n とすると，数列 $\{a_n\}$ は，3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, ……

すると，$\{a_n\}$ は 3, 9, 7, 1 を繰り返す周期 4 の周期数列となるので，

$a_n = 3$ (n を 4 で割った余りが 1 のとき)

$a_n = 9$ (n を 4 で割った余りが 2 のとき)

$a_n = 7$ (n を 4 で割った余りが 3 のとき)

$a_n = 1$ (n を 4 で割った余りが 0 のとき)

(2)　3^n を 4 で割った余りを b_n とすると，数列 $\{b_n\}$ は，3, 1, 3, 1, 3, 1, ……

すると，$\{b_n\}$ は 3, 1 を繰り返す周期 2 の周期数列と予測できる。

そこで，3^{n+2} と 3^n の関係を調べると，

$$3^{n+2} = 9\cdot 3^n = (4\cdot 2+1)\cdot 3^n = 4\cdot 2\cdot 3^n + 3^n \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$より，$4\cdot 2\cdot 3^n$ は 4 の倍数であるので，3^{n+2} を 4 で割った余りと 3^n を 4 で割った余りは等しい。これより，$\{b_n\}$ は周期 2 の周期数列となり，

$b_n = 3$ (n を 2 で割った余りが 1 のとき)

$b_n = 1$ (n を 2 で割った余りが 0 のとき)

(3)　$x_1 = 1$，$x_{n+1} = 3^{x_n}$ で定義された数列 $\{x_n\}$ に対して，

$$x_2 = 3^{x_1} = 3^1 = 3,\ x_3 = 3^{x_2} = 3^3 = 27,\ x_4 = 3^{x_3} = 3^{27},\ \cdots\cdots$$

すると，3 の奇数乗は奇数より，帰納的に x_n は奇数である。

よって，(2)の結論から，3^{x_n} を 4 で割った余りは 3 である。すなわち $x_{n+1} = 3^{x_n}$ から，x_n $(n\geqq 2)$ を 4 で割った余りは 3 である。

さらに，この結果を(1)の結論に適用すると，3^{x_n} を 10 で割った余りは 7 である。すなわち $x_{n+1} = 3^{x_n}$ から，x_n $(n\geqq 3)$ を 10 で割った余りは 7 である。

したがって，x_{10} を 10 で割った余りは 7 である。

［解　説］

整数と数列の融合問題です。一見，関連のわからない(1)と(2)の結果が, (3)でうまく利用できる誘導となっています。

$\boxed{18}$ ［九州大］

自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

18 ［九州大］

(1) 10^n を 13 で割った余りが a_n より，q_n を自然数として，$10^n=13q_n+a_n$ と表せ，

$$10^{n+1}=10\cdot 10^n=10(13q_n+a_n)=13(10q_n)+10a_n$$

すると，10^{n+1} を 13 で割った余り a_{n+1} は，$10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。

(2) 10^1 を 13 で割った余りは 10 より，$a_1=10$ である。

そして，(1)の結論を当てはめていくと，a_2 は $10a_1=100$ を 13 で割った余りに等しく，$100=13\times 7+9$ より $a_2=9$ である。

a_3 は $10a_2=90$ を 13 で割った余り $(90=13\times 6+12)$ より，$a_3=12$ である。

a_4 は $10a_3=120$ を 13 で割った余り $(120=13\times 9+3)$ より，$a_4=3$ である。

a_5 は $10a_4=30$ を 13 で割った余り $(30=13\times 2+4)$ より，$a_5=4$ である。

a_6 は $10a_5=40$ を 13 で割った余り $(40=13\times 3+1)$ より，$a_6=1$ である。

(3) 自然数 N を十進法で表示したとき，最初の桁の数字を k $(1\leqq k\leqq 9)$，最後の桁の数字を l $(0\leqq l\leqq 9)$ とおくと，条件(i)(ii)より，

$$N=k\cdot 10^5+2\cdot 10^4+0\cdot 10^3+1\cdot 10^2+6\cdot 10^1+l$$

ここで，(2)の結論を合同式を用い，mod13 で記すと，

$$10^5\equiv 4,\ 10^4\equiv 3,\ 10^3\equiv 12,\ 10^2\equiv 9,\ 10^1\equiv 10$$

これより，$N\equiv 4k+2\cdot 3+1\cdot 9+6\cdot 10+l=4k+l+75\equiv 4k+l+10$

さらに，条件(iii)から N が 13 で割り切れることから，$4k+l+10$ が 13 の倍数となり，$14\leqq 4k+l+10\leqq 55$ より，

(a) $4k+l+10=26$ のとき　$4k+l=16$ から $(k,\ l)=(2,\ 8)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 0)$

(b) $4k+l+10=39$ のとき　$4k+l=29$ から $(k,\ l)=(5,\ 9)$，$(6,\ 5)$，$(7,\ 1)$

(c) $4k+l+10=52$ のとき　$4k+l=42$ から $(k,\ l)=(9,\ 6)$

(a)～(c)より，求める自然数 N は，

220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166

［解 説］

うまく誘導のついた整数問題です。なお，(3)の不定方程式は，一般的に解くよりは，値を絞り込んで数値を代入していった方が簡単です。また，(1)から合同式を利用してもよかったのですが……。

19　　［東北大・理］

以下の問いに答えよ。

(1)　6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2)　等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

$\boxed{19}$ ［東北大・理］

(1) 6 以上の整数 n に対して，$2^n > n^2+7$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=6$ のとき　$2^n = 64$，$n^2+7=43$ より成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき　$2^k > k^2+7$ と仮定すると，$2^{k+1} > 2(k^2+7)$ となり，

$$2(k^2+7)-\{(k+1)^2+7\} = k^2-2k+6 = k(k-2)+6 > 0$$

すると，$2(k^2+7) > (k+1)^2+7$ から，$2^{k+1} > (k+1)^2+7$

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，6 以上の整数 n に対して，$2^n > n^2+7$ が成り立つ。

(2) 素数 p, q に対して，$p^q = q^p + 7$ ………①

(i) $p=2$ のとき　①から $2^q = q^2+7$ ………②

(1)から $q \geqq 6$ すなわち 7 以上の素数について，$2^q > q^2+7$ となり②は成立しない。そこで，$q=2,\ 3,\ 5$ のときを調べる。

(a) $q=2$ のとき　$2^q=4$，$q^2+7=11$ となり，②は成立しない。

(b) $q=3$ のとき　$2^q=8$，$q^2+7=16$ となり，②は成立しない。

(c) $q=5$ のとき　$2^q=32$，$q^2+7=32$ となり，②は成立する。

(ii) $p \geqq 3$ のとき　p は奇数となり，$q \geqq 3$ すなわち q も奇数の場合については，p^q，q^p はともに奇数から，①は両辺の偶奇が異なり，成立しない。

そこで，$q=2$ のときについて，①から $p^2 = 2^p + 7$ ………③

(1)から $p \geqq 6$ すなわち 7 以上の素数について，$2^p + 7 > (p^2+7)+7$ となり③は成立しない。そこで，$p=3,\ 5$ のときを調べる。

(a) $p=3$ のとき　$p^2=9$，$2^p+7=15$ となり，③は成立しない。

(b) $p=5$ のとき　$p^2=25$，$2^p+7=39$ となり，③は成立しない。

(i)(ii)より，①を満たす素数 p, q は，$(p,\ q)=(2,\ 5)$ のみである。

［解 説］

素数が題材の誘導つき不定方程式の問題です。素数で偶数なのは 2 だけということがポイントになっています。なお，(2)で p^q と q^p の偶奇が異なる点に注目すると，少し解答例を短縮できます。

20　［東京工大］

n を 2 以上の自然数とする。

(1) n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ。

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ。

20 ［東京工大］

(1) n が素数のとき，n より小さい自然数 $n-1$，$n-2$，$n-3$，…，3，2，1 は，いずれも n と互いに素である。

すると，それらの数の積 $(n-1)!$ は n と互いに素になり，n で割り切れない。

また，$n=4$ のとき $(n-1)!=3!=6$ は n で割り切れない。

(2) 素数でなくかつ 4 でもない n は，6 以上の合成数であり，

(i) $n=pq$ (p は 2 以上の自然数，q は 3 以上の自然数，$p\neq q$)のとき

$(n-1)!=(pq-1)(pq-2)(pq-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ となり，$pq-p=p(q-1)$ は p の倍数，$pq-q=q(p-1)$ は q の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=pq$ で割り切れる。

(ii) $n=r^2$ (r は 3 以上の素数)のとき

$(n-1)!=(r^2-1)(r^2-2)(r^2-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ となり，$r^2-r=r(r-1)$ は r の倍数，$r^2-2r=r(r-2)$ は r の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=r^2$ で割り切れる。

(i)(ii)より，n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

［解 説］

整数からむ証明問題です。方針を立てるために，まず具体例を考え，それを一般化して解答例を作りました。

$\boxed{21}$ ［京都大・理］

素数 p, q を用いて，$p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ。

21 ［京都大・理］

素数 p, q に対して，$n=p^q+q^p$ とおく。ここで, n が素数である p, q の条件を求めるとき, 対称性から $p\leqq q$ としても一般性は失われない。

まず, p が 3 以上のときは, 素数 p, q はともに奇数になり，p^q，q^p もともに奇数である。よって, n は偶数となり素数ではない。

これより，$p=2$ となり，$n=2^q+q^2$ と表される。

さらに，$q=2$ のときは，$n=2^2+2^2=8$ となり, n は素数ではない。

また，$q=3$ のときは，$n=2^3+3^2=17$ となり, n は素数となる。

さて, q が 5 以上の素数のとき, 2 の倍数でもなく, かつ 3 の倍数でもないことに着目すると, k を自然数として，$q=6k\pm1$ と表せる。

(i)　$q=6k+1$ のとき

$$n=2^{6k+1}+(6k+1)^2=2\cdot 64^k+36k^2+12k+1$$

ここで，N_1 を整数とすると，$64^k=(3\cdot 21+1)^k=3N_1+1$ となるので,

$$n=2(3N_1+1)+36k^2+12k+1=3(2N_1+12k^2+4k+1)$$

よって, n は 3 の倍数となり, 素数ではない。

(ii)　$q=6k-1$ のとき

$$n=2^{6k-1}+(6k-1)^2=32\cdot 64^{k-1}+36k^2-12k+1$$

ここで，N_2 を整数とすると，$64^{k-1}=(3\cdot 21+1)^{k-1}=3N_2+1$ となるので,

$$n=32(3N_2+1)+36k^2-12k+1=3(32N_2+12k^2-4k+11)$$

よって, n は 3 の倍数となり, 素数ではない。

(i)(ii)より, q が 5 以上の素数のとき, n は素数にならない。

以上より，p^q+q^p と表される素数は 17 だけである。

［解 説］

演習しておきたい素数がらみの整数問題です。まず, 2 以外の素数は奇数という頻出事項でふるいにかけて p の値を決め, 次に q の値を 2, 3, 5, 7, 11 として n の値を計算すると, 5 以上では 3 の倍数であることがわかります。ただ, q が奇数ということだけでは，$q=9$ で n が素数となることから考え直し, その結果, q を 6 で割った余りで分類とした解答例となったわけです。なお, 二項展開を用いる箇所は, 省略気味に記しています。

$\boxed{22}$ ［名古屋大・文］

正の整数 n に対して，その(1 と自分自身も含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ とかくことにする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) k を正の整数, p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ。

(2) $s(2016)$ を求めよ。

(3) 2016 の正の約数 n で，$s(n)=2016$ となるものをすべて求めよ。

22 ［名古屋大・文］

(1) k を正の整数, p を 3 以上の素数とするとき，$2^k p$ の正の約数は,

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^k,\ p,\ 2p,\ 2^2p,\ \cdots,\ 2^kp$$

したがって, その和 $s(2^kp)$ は,

$$s(2^kp)=(1+2+2^2+\cdots+2^k)(1+p)=\frac{2^{k+1}-1}{2-1}(1+p)=(2^{k+1}-1)(1+p)$$

(2) $2016=2^5\cdot3^2\cdot7$ より, その正の約数の和 $s(2016)$ は,

$$s(2016)=(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2)(1+7)=63\cdot13\cdot8=6552$$

(3) 2016 の正の約数 n は, (2)から a, b, c を整数として,

$$n=2^a\cdot3^b\cdot7^c\quad(0\leqq a\leqq5,\ 0\leqq b\leqq2,\ 0\leqq c\leqq1)$$

すると, n の正の約数の和 $s(n)$ は,

$$s(n)=\frac{2^{a+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{b+1}-1}{3-1}\cdot\frac{7^{c+1}-1}{7-1}=\frac{1}{12}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)$$

条件より，$s(n)=2016$ なので，$\frac{1}{12}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^5\cdot3^2\cdot7$

$$(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3^3\cdot7\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$2^{a+1}-1$ は奇数で $3^{b+1}-1$ と $7^{c+1}-1$ は偶数, そして $3^{b+1}-1$ と $7^{c+1}-1$ は 7 の倍数とはなりえないので，$2^{a+1}-1$ が 7 の倍数となる。

すると，$2^{a+1}-1$ の値として, 7，$3\cdot7$，$3^2\cdot7$，$3^3\cdot7$ があげられる。

(i) $2^{a+1}-1=7$ のとき　$a=2$ となり, $(*)$は $(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3^3$

$c=0$ のとき，$3^{b+1}-1=2^6\cdot3^2$ となり，$3^{b+1}=577$ より整数 b は存在しない。

$c=1$ のとき，$3^{b+1}-1=2^3\cdot3^2$ となり，$3^{b+1}=73$ より整数 b は存在しない。

(ii) $2^{a+1}-1=3\cdot7$ のとき　$2^{a+1}=22$ より整数 a は存在しない。

(iii) $2^{a+1}-1=3^2\cdot7$ のとき　$a=5$ となり, $(*)$は $(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3$

$c=0$ のとき，$3^{b+1}-1=2^6$ となり，$3^{b+1}=65$ より整数 b は存在しない。

$c=1$ のとき，$3^{b+1}-1=2^3$ となり，$b=1$ である。

(iv) $2^{a+1}-1=3^3\cdot7$ のとき　$2^{a+1}=190$ より整数 a は存在しない。

(i)～(iv)より，$(a,\ b,\ c)=(5,\ 1,\ 1)$ となり，$n=2^5\cdot3^1\cdot7^1=672$ である。

［解 説］

正の約数すべての和という頻出事項が題材になっています。(3)については, まず偶奇でふるいにかけたところ絞り込みが足らず, まだ候補が多いので, 次に 7 の倍数に注目しています。

$\boxed{23}$ ［信州大・医］

n を 2 以上の自然数とする。n 人でじゃんけんをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし，負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 1 回目のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

(2) 1 回目のじゃんけんで，あいこになる確率を求めよ。

(3) $n=5$のとき，ちょうど 2 回のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

23 ［信州大・医］

(1) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，勝者がただ 1 人に決まるのは，勝者の選び方が ${}_n\mathrm{C}_1 = n$ 通りで，手の出方が 3 通りである。

これより，この場合の確率は，$\dfrac{n\cdot 3}{3^n} = \dfrac{n}{3^{n-1}}$ である。

(2) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，あいこにならないのは，2 種類の手が出た場合である。このとき，種類の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り，出方が $2^n - 2$ 通りとなり，その確率は，$\dfrac{3(2^n-2)}{3^n} = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$ である。

よって，あいこになる確率は，$1 - \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}} = \dfrac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$ である。

(3) 5 人でじゃんけんをし，2 回のじゃんけんで勝者がただ 1 人に決まるのは，

(i) 5 人→5 人→1 人のとき

5 人→5 人の確率は(2)より $\dfrac{3^4-2^5+2}{3^4} = \dfrac{17}{3^3}$，5 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{5}{3^4}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{17}{3^3}\cdot\dfrac{5}{3^4} = \dfrac{85}{3^7}$ である。

(ii) 5 人→4 人→1 人のとき

5 人→4 人は敗者がただ 1 人決まると考え，その確率は(1)から $\dfrac{5}{3^4}$，4 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{4}{3^3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{5}{3^4}\cdot\dfrac{4}{3^3} = \dfrac{20}{3^7}$ である。

(iii) 5 人→3 人→1 人のとき

5 人→3 人は勝者の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通り，手の出方が 3 通りより，その確率は $\dfrac{10\cdot 3}{3^5} = \dfrac{10}{3^4}$ となる。3 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{3}{3^2}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{3}{3^2} = \dfrac{30}{3^6}$ である。

(iv) 5 人→2 人→1 人のとき

5 人→2 人は敗者が 3 人決まると考え，その確率は(iii)から $\dfrac{10}{3^4}$，2 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{2}{3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{20}{3^5}$ である。

(i)〜(iv)より，求める確率は，$\dfrac{85}{3^7} + \dfrac{20}{3^7} + \dfrac{30}{3^6} + \dfrac{20}{3^5} = \dfrac{375}{3^7} = \dfrac{125}{729}$

［解　説］

じゃんけんを題材としたよく見かける確率問題ですが，意外なほど手こずります。

24 ［東北大・理］

サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に $a,\ b,\ c$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a,\ b,\ c$ がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

(2) $a,\ b,\ c$ がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

24 ［東北大・理］

(1) $a,\ b,\ c$ が 3 辺の長さの三角形が直角三角形となるのは，斜辺の長さが c のとき，

$$a^2+b^2=c^2\cdots\cdots\cdots①$$

そこで，a^2 と b^2，およびその和をまとめると，右表のようになる。

a^2 \ b^2	1	4	9	16	25	36
1	2	5	10	17	26	37
4	5	8	13	20	29	40
9	10	13	18	25	34	45
16	17	20	25	32	41	52
25	26	29	34	41	50	61
36	37	40	45	52	61	72

すると，和が平方数なのは 25 だけより，①を満たすのは，

$$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 3,\ 5)$$

また，斜辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様なので，求める直角三角形となる確率は，$\dfrac{2\times3}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ である。

(2) $a,\ b,\ c$ が 3 辺の長さの三角形が鈍角三角形となるのは，最大辺の長さが c のとき，

$$a+b>c\cdots\cdots\cdots②,\ \ a^2+b^2<c^2\cdots\cdots\cdots③$$

まず，$c=1,\ 2$ では成立しないので $c\geqq3$ となり，それぞれの場合を(1)の表をもとに調べる。

(i) $c=3$ のとき

②より $a+b>3$，③より $a^2+b^2<9$ から，$(a,\ b)=(2,\ 2)$

(ii) $c=4$ のとき

②より $a+b>4$，③より $a^2+b^2<16$ から，$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(iii) $c=5$ のとき

②より $a+b>5$，③より $a^2+b^2<25$ から，$(a,\ b)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$

(iv) $c=6$ のとき

②より $a+b>6$，③より $a^2+b^2<36$ から，

$$(a,\ b)=(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3)$$

(i)～(iv)より，$(a,\ b)$ の組は $1+2+3+7=13$ 通りとなる。

また，最大辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様に 13 通りずつなので，求める鈍角三角形となる確率は，$\dfrac{13\times3}{6^3}=\dfrac{13}{72}$ である。

［解 説］

丁寧に数え上げるタイプの確率の問題です。このような場合は，表を作ると数えもれが防げます。

$\boxed{25}$　　　　［東京大・文］

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

$\boxed{25}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

(1)　5 試合目で A が優勝するのは, 4 試合目の対戦までどのチームも 2 連勝せず, しかも 4 試合目と 5 試合目に A が勝つ場合である。

そこで, 各試合の勝者を 1 試合目から並べて書くと,

(i)　1 試合目に A が勝つとき　ACBAA の場合となり, その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{32}$

(ii)　1 試合目に B が勝つとき　BCAB…となり, この場合は不適。

(i)(ii)より, 5 試合目で A が優勝する確率は $\dfrac{1}{32}$ である。

(2)　n 試合目$(n\geqq 2)$で A が優勝する場合, その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ である。

(i)　1 試合目に A が勝つとき　ACBACBACB…ACBAA となる場合で, n を 3 で割った余りは 2 となる。

(ii)　1 試合目に B が勝つとき　BCABCABCA…BCAA となる場合で, n を 3 で割った余りは 1 となる。

(i)(ii)以外は起こりえないことより, n 試合目で A が優勝する確率を $p(n)$ とすると,

$$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (n\text{ が }3\text{ の倍数でないとき}),\quad p(n)=0\ (n\text{ が }3\text{ の倍数のとき})$$

(3)　l を正の整数とするとき, (2)より,

(i)　n を 3 で割った余りが 2 $(n=3l-1)$のとき　$p(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3l-1}$

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 $(n=3l+1)$のとき　$p(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3l+1}$

(iii)　n を 3 で割った余りが 0 $(n=3l)$のとき　$p(n)=0$

さて, m を正の整数とするとき, 総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を P_m とすると, $m\geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}P_m&=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}+0=2\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}\\&=2\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}\\&=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\end{aligned}$$

ここで, $m=1$ をあてはめると, $P_1=\dfrac{5}{14}-\dfrac{6}{7}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$ となり, 成立している。

したがって, $P_m=\dfrac{5}{14}-\dfrac{6}{7}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3m}$ である。

［解 説］

巴戦を題材にした有名問題です。誘導がたいへん丁寧です。

26 ［名古屋大・理］

玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。

26　　［名古屋大・理］

(1)　袋 A に赤玉 2 個, 袋 B に白玉 2 個の状態から始めて, 与えられた操作を 1 回行った後, 袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について, その確率 $P_1(k)$ は,

(i)　$k=0$ のとき　B→A に白, 次に A→B に白の場合より, $P_1(0)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(ii)　$k=1$ のとき　B→A に白, 次に A→B に赤の場合より, $P_1(1)=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(iii)　$k=2$ のとき　この場合は起こりえないので, $P_1(2)=0$

(2)　袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について,

(i)　与えられた操作を n 回行った後, $k=0$ のときに操作をもう 1 回行うとき
(1)から, $k=0$ となる確率は $\frac{1}{3}$, $k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(ii)　与えられた操作を n 回行った後, $k=1$ のときに操作をもう 1 回行うとき
$k=0$ となるのは, B→A に赤, 次に A→B に白の場合より, その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$k=1$ となるのは, B→A に赤, 次に A→B に赤の場合, もしくは B→A に白, 次に A→B に白の場合より, その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$k=2$ となるのは, B→A に白, 次に A→B に赤の場合より, その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(iii)　与えられた操作を n 回行った後, $k=2$ のときに操作をもう 1 回行うとき
(i)と同様に考えて, $k=2$ となる確率は $\frac{1}{3}$, $k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(i)～(iii)より, $P_n(k)$ と $P_{n+1}(k)$ の関係は, $P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)=1$ に留意すると,

$$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)\cdots\cdots\cdots①$$

$$P_{n+1}(1)=\frac{2}{3}P_n(0)+\frac{2}{3}P_n(1)+\frac{2}{3}P_n(2)=\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

②より, $P_n(1)=\frac{2}{3}\ (n\geqq 2)$ となり, (1)から $P_1(1)=\frac{2}{3}$ なので, $P_n(1)=\frac{2}{3}\ (n\geqq 1)$

①に代入すると, $P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{9}$ となり, $P_{n+1}(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{P_n(0)-\frac{1}{6}\right\}$

$$P_n(0)-\frac{1}{6}=\left\{P_1(0)-\frac{1}{6}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

したがって, $P_n(0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ となり,

$$P_n(2)=1-P_n(0)-P_n(1)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

［解　説］

確率と漸化式について, よく見かける頻出問題です。

27 ［広島大・文］

n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 変量 x のデータの値が x_1, x_2, $\cdots$, x_n であるとし, $f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$ とする。$f(a)$ を最小にする a は x_1, x_2, $\cdots$, x_n の平均値で, そのときの最小値は x_1, x_2, $\cdots$, x_n の分散であることを示せ。

(2) c を定数として, 変量 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k=k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ z_k=ck\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとする。このとき y_1, y_2, $\cdots$, y_n の分散が z_1, z_2, $\cdots$, z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(3) 変量 x のデータの値が x_1, x_2, $\cdots$, x_n であるとし, その平均値を $\overline{x}$ とする。新たにデータを得たとし, その値を x_{n+1} とする。x_1, x_2, $\cdots$, x_n, x_{n+1} の平均値を x_{n+1}, $\overline{x}$ および n を用いて表せ。

(4) 次の 40 個のデータの平均値, 分散, 中央値を計算すると, それぞれ, ちょうど 40, 670, 35 であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし, その値が 40 であった。このとき, 41 個のすべてのデータの平均値, 分散, 中央値を求めよ。ただし, 得られた値が整数でない場合は, 小数第 1 位を四捨五入せよ。

27 ［広島大・文］

(1) x_1，x_2，…，x_n の平均値を $\overline{x}$，分散を s^2 とすると，

$$f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-2a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\overline{x^2}-2a\overline{x}+a^2=(a-\overline{x})^2+\overline{x^2}-(\overline{x})^2=(a-\overline{x})^2+s^2$$

よって，$f(a)$ は $a=\overline{x}$ のとき最小となり，最小値は s^2 である。

(2) $z_k=cy_k$ で，y_1，y_2，…，y_n の平均を $\overline{y}$，z_1，z_2，…，z_n の平均を $\overline{z}$ とすると，

$$\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}cy_k=c\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=c\overline{y}$$

また，y_1，y_2，…，y_n の分散を ${s_y}^2$，z_1，z_2，…，z_n の分散を ${s_z}^2$ とすると，

$${s_z}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{z_k}^2-(\overline{z})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(cy_k)^2-(c\overline{y})^2=c^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2-c^2(\overline{y})^2=c^2{s_y}^2$$

条件 ${s_y}^2>{s_z}^2$ から，${s_y}^2>c^2{s_y}^2$ となり $c^2<1$，すなわち $-1<c<1$ である。

(3) $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=n\overline{x}$ となり，x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1} の平均値は，

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}x_k=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}(n\overline{x}+x_{n+1})$$

(4) 与えられた40個のデータに，値40のデータを新たに加えたときを考える。

40個のデータの平均値は40なので，41個のデータの平均値は，

$$\frac{1}{41}(40\cdot40+40)=40$$

40個のデータの分散は670なので，41個のデータの分散は，

$$\frac{1}{41}\{670\cdot40+(40-40)^2\}\fallingdotseq653.6\cdots$$

よって，小数第1位を四捨五入すると，654である。

40個のデータの中央値は，小さい方から20番目(30)と21番目(40)の平均値から35なので，41個のデータの中央値は21番目より40である。

［解 説］

データの分析に関して，平均値や分散などの定義の確認問題です。