$\boxed{8}$ ［北海道大・文］

$x,\ y$ を自然数とする。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

$\boxed{9}$ ［大阪大・文］

次の問いに答えよ。

(1) a を正の実数とし，k を 1 以上の実数とする。x についての 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ は，不等式 $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たすような実数解 s をもつことを示せ。

(2) a を 3 以上の整数とする。n^2+a が $an+1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 n を a を用いて表せ。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・理］

約数，公約数，最大公約数を次のように定める。

・ 2 つの整数 a, b に対して，$a=bk$ を満たす整数 k が存在するとき，b は a の約数という。

・ 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という。

・ 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という。

以下の問いに答えよ。

(1)　a, b, c, p は 0 でない整数で $a=pb+c$ を満たしているとする。

(i)　$a=18$，$b=30$，$c=-42$，$p=2$ のとき，a と b の公約数の集合 S, および b と c の公約数の集合 T を求めよ。

(ii)　a と b の最大公約数を M, b と c の最大公約数を N とする。M と N は等しいことを示せ。ただし，a, b, c, p は 0 でない任意の整数とする。

(2)　自然数の列 $\{a_n\}$ を，$a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，$a_1=3$，$a_2=4$ で定める。

(i)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(ii)　a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。

(iii)　a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ。

$\boxed{11}$ ［東京大・文］

以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 3^{x_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

$\boxed{12}$ ［九州大］

自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

13　　［東北大・理］

以下の問いに答えよ。

(1)　6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2)　等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

14 ［東京工大］

n を 2 以上の自然数とする。

(1) n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ。

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ。

$\boxed{15}$　［京都大・理］

素数 p, q を用いて，$p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ。

16　　［名古屋大・文］

正の整数 n に対して，その(1 と自分自身も含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ とかくことにする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ。

(2)　$s(2016)$ を求めよ。

(3)　2016 の正の約数 n で，$s(n)=2016$ となるものをすべて求めよ。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］

(1)　自然数 x に対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるためには，$\dfrac{3x}{x^2+2}\geqq 1$ が必要である。

$$3x\geqq x^2+2,\ \ x^2-3x+2\leqq 0,\ \ (x-1)(x-2)\leqq 0$$

よって，$1\leqq x\leqq 2$ となり，$x=1$ または $x=2$ である。

(i)　$x=1$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{3}{1+2}=1$ となり適する。

(ii)　$x=2$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{6}{4+2}=1$ となり適する。

(i)(ii)より，求める x は，$x=1,\ 2$ である。

(2)　自然数 x, y に対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数である条件は,

(i)　$y=1$ のとき

$\dfrac{1}{y}=1$ から $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数となることより，(1)の結果から $x=1,\ 2$

(ii)　$y\geqq 2$ のとき

$0<\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，(i)より $x\neq 1$，$x\neq 2$ なので，$x\geqq 3$ である。

すると，(1)の結果から $0<\dfrac{3x}{x^2+2}<1$ となり，$0<\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{3}{2}$ から,

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，$\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2}$，$y=\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}$

ここで，$y\geqq 2$ から $\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}\geqq 2$ となり，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$ より,

$$x^2+2\geqq 2(x^2-3x+2),\ \ x^2-6x+2\leqq 0$$

よって，$3-\sqrt{7}\leqq x\leqq 3+\sqrt{7}$ となり，$x=3$ または $x=4$ または $x=5$

(ii-i)　$x=3$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{9}{11}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{11}$ であるので不適。

(ii-ii)　$x=4$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ であるので $y=3$。

(ii-iii)　$x=5$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{15}{27}=\dfrac{5}{9}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{9}$ であるので不適。

(i)(ii)より，求める $(x,\ y)$ は，$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(4,\ 3)$ である。

［解　説］

値を絞り込むタイプの整数問題です。一見，難問そうに見える(2)では，(1)での考察がたいへん役立っています。なお，記述は省きましたが，方針を立てるとき，x に具体的な数値を入れて計算をしています。

９　　［大阪大・文］

(1)　実数 $a,\ k$ が $a>0$，$k\geqq 1$ のとき，2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ ……①に対して，$f(x)=x^2-kax+a-k$ とおくと，

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}+k+a-k=\frac{1}{a^2}+a>0$$

$$f(1)=1-ka+a-k=(a+1)(1-k)\leqq 0$$

これより，①は $-\frac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たす実数解 s をもつ。

(2)　整数 a,n,k は，$a\geqq 3$，$n\geqq 2$，$k\geqq 1$ を満たすとする。

ここで，n^2+a は $an+1$ で割り切れることから，$n^2+a=k(an+1)$ と表せ，

$$n^2-kan+a-k=0\ \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，②は $f(n)=0$ であり，さらに(1)から $-\frac{1}{a}<s\leqq 1$ なので，①は異なる実数解 $s,\ n\ (s<n)$ をもつことになる。

さて，①について，解と係数の関係から $s+n=ka$ となり，$s=ka-n$ ………③

a,n,k は整数なので，③から s も整数となる。さらに，$a\geqq 3$ から $-\frac{1}{3}\leqq-\frac{1}{a}<0$ となり，$-\frac{1}{a}<s\leqq 1$ から $s=0,\ 1$ である。

(i)　$s=0$ のとき　$f(0)=a-k=0$ から $k=a$ となり，③から $n=a^2$

そして，$a^2\geqq 9$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(ii)　$s=1$ のとき　$f(1)=(a+1)(1-k)=0$ から $k=1$ となり，③から $n=a-1$

そして，$a-1\geqq 2$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(i)(ii)より，$n=a^2,\ a-1$ である。

［解　説］

一見，無関係に思える 2 つの小問です。しかし，(2)を解いていくと，この整数問題への誘導として，(1)の 2 次方程式の解の配置についての設問がある，というのに気づきます。

10　　［神戸大・理］

(1) (i)　$a=18=2\times3^2$ と $b=30=2\times3\times5$ の公約数の集合 S は,

$$S=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$$

また, $b=30=2\times3\times5$ と $c=-42=-2\times3\times7$ の公約数の集合 T は,

$$T=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$$

(ii)　$a,\ b,\ c,\ p$ は 0 でない任意の整数, そして a と b の最大公約数を M, b と c の最大公約数を N とし, $a=pb+c$ ……①を満たしている。

まず, N は b と c の公約数で, ①から N は a の約数でもある。すると, N は a と b の公約数となり, a と b の最大公約数 M と比べると, $N\leqq M$ である。

また, M は a と b の公約数で, ①から $c=a-pb$ となるので, M は c の約数でもある。すると, M は b と c の公約数となり, b と c の最大公約数 N と比べると, $M\leqq N$ である。

したがって, $N\leqq M$ かつ $M\leqq N$ から, $M=N$ である。

(2) (i)　0 でない任意の整数 l と m に対して, その最大公約数を $G(l,\ m)$ で表す。

さて, $a_1=3$, $a_2=4$, $a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる自然数の列 $\{a_n\}$ に対して, 帰納的に $a_n\neq0$ なので, (1)から $G(a_{n+2},\ a_{n+1})=G(a_{n+1},\ a_n)$

$$G(a_{n+1},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-1})=\cdots=G(a_3,\ a_2)=G(a_2,\ a_1)=G(4,\ 3)=1$$

(ii)　$a_{n+4}=6a_{n+3}+a_{n+2}=6(6a_{n+2}+a_{n+1})+a_{n+2}=37a_{n+2}+6a_{n+1}$

ここで, $6a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$ から,

$$a_{n+4}=37a_{n+2}+(a_{n+2}-a_n)=38a_{n+2}-a_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

(iii)　②に(1)の結果を適用すると, $G(a_{n+4},\ a_{n+2})=G(a_{n+2},\ a_n)$ である。

ここで, $a_3=6a_2+a_1=27$, $a_4=6a_3+a_2=166$ なので,

(a)　n が奇数のとき

$$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_3,\ a_1)=G(27,\ 3)=3$$

(b)　n が偶数のとき

$$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_4,\ a_2)=G(166,\ 4)=2$$

［解　説］

ユークリッドの互除法に関する基本を確認した後, それを漸化式に適用する問題です。細かい誘導のため, 方針に迷いはないでしょう。

11 ［東京大・文］

(1)　3^n を 10 で割った余りを a_n とすると，数列 $\{a_n\}$ は，3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, ……

すると，$\{a_n\}$ は 3, 9, 7, 1 を繰り返す周期 4 の周期数列となるので，

$a_n = 3$　(n を 4 で割った余りが 1 のとき)

$a_n = 9$　(n を 4 で割った余りが 2 のとき)

$a_n = 7$　(n を 4 で割った余りが 3 のとき)

$a_n = 1$　(n を 4 で割った余りが 0 のとき)

(2)　3^n を 4 で割った余りを b_n とすると，数列 $\{b_n\}$ は，3, 1, 3, 1, 3, 1, ……

すると，$\{b_n\}$ は 3, 1 を繰り返す周期 2 の周期数列と予測できる。

そこで，3^{n+2} と 3^n の関係を調べると，

$$3^{n+2} = 9\cdot 3^n = (4\cdot 2+1)\cdot 3^n = 4\cdot 2\cdot 3^n + 3^n \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$より，$4\cdot 2\cdot 3^n$ は 4 の倍数であるので，3^{n+2} を 4 で割った余りと 3^n を 4 で割った余りは等しい。これより，$\{b_n\}$ は周期 2 の周期数列となり，

$b_n = 3$　(n を 2 で割った余りが 1 のとき)

$b_n = 1$　(n を 2 で割った余りが 0 のとき)

(3)　$x_1 = 1$，$x_{n+1} = 3^{x_n}$ で定義された数列 $\{x_n\}$ に対して，

$$x_2 = 3^{x_1} = 3^1 = 3,\ x_3 = 3^{x_2} = 3^3 = 27,\ x_4 = 3^{x_3} = 3^{27},\ \cdots\cdots$$

すると，3 の奇数乗は奇数より，帰納的に x_n は奇数である。

よって，(2)の結論から，3^{x_n} を 4 で割った余りは 3 である。すなわち $x_{n+1} = 3^{x_n}$ から，x_n $(n \geqq 2)$ を 4 で割った余りは 3 である。

さらに，この結果を(1)の結論に適用すると，3^{x_n} を 10 で割った余りは 7 である。すなわち $x_{n+1} = 3^{x_n}$ から，x_n $(n \geqq 3)$ を 10 で割った余りは 7 である。

したがって，x_{10} を 10 で割った余りは 7 である。

［解　説］

整数と数列の融合問題です。一見，関連のわからない(1)と(2)の結果が，(3)でうまく利用できる誘導となっています。

12　　　［九州大］

(1)　10^n を 13 で割った余りが a_n より，q_n を自然数として，$10^n = 13q_n + a_n$ と表せ，

$$10^{n+1} = 10\cdot 10^n = 10(13q_n + a_n) = 13(10q_n) + 10a_n$$

すると，10^{n+1} を 13 で割った余り a_{n+1} は，$10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。

(2)　10^1 を 13 で割った余りは 10 より，$a_1 = 10$ である。

そして，(1)の結論を当てはめていくと，a_2 は $10a_1 = 100$ を 13 で割った余りに等しく，$100 = 13\times 7 + 9$ より $a_2 = 9$ である。

a_3 は $10a_2 = 90$ を 13 で割った余り $(90 = 13\times 6 + 12)$ より，$a_3 = 12$ である。

a_4 は $10a_3 = 120$ を 13 で割った余り $(120 = 13\times 9 + 3)$ より，$a_4 = 3$ である。

a_5 は $10a_4 = 30$ を 13 で割った余り $(30 = 13\times 2 + 4)$ より，$a_5 = 4$ である。

a_6 は $10a_5 = 40$ を 13 で割った余り $(40 = 13\times 3 + 1)$ より，$a_6 = 1$ である。

(3)　自然数 N を十進法で表示したとき，最初の桁の数字を k $(1\leqq k\leqq 9)$，最後の桁の数字を l $(0\leqq l\leqq 9)$ とおくと，条件(i)(ii)より，

$$N = k\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 0\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + l$$

ここで，(2)の結論を合同式を用い，mod13 で記すと，

$$10^5 \equiv 4,\ 10^4 \equiv 3,\ 10^3 \equiv 12,\ 10^2 \equiv 9,\ 10^1 \equiv 10$$

これより，$N \equiv 4k + 2\cdot 3 + 1\cdot 9 + 6\cdot 10 + l = 4k + l + 75 \equiv 4k + l + 10$

さらに，条件(iii)から N が 13 で割り切れることから，$4k + l + 10$ が 13 の倍数となり，$14\leqq 4k + l + 10\leqq 55$ より，

(a)　$4k + l + 10 = 26$ のとき　$4k + l = 16$ から $(k,\ l) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0)$

(b)　$4k + l + 10 = 39$ のとき　$4k + l = 29$ から $(k,\ l) = (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1)$

(c)　$4k + l + 10 = 52$ のとき　$4k + l = 42$ から $(k,\ l) = (9,\ 6)$

(a)～(c)より，求める自然数 N は，

220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166

［解　説］

うまく誘導のついた整数問題です。なお，(3)の不定方程式は，一般的に解くよりは，値を絞り込んで数値を代入していった方が簡単です。また，(1)から合同式を利用してもよかったのですが……。

$\boxed{13}$ ［東北大・理］

(1) 6 以上の整数 n に対して，$2^n > n^2+7$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=6$ のとき　$2^n=64$，$n^2+7=43$ より成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき　$2^k > k^2+7$ と仮定すると，$2^{k+1} > 2(k^2+7)$ となり，

$$2(k^2+7)-\{(k+1)^2+7\}=k^2-2k+6=k(k-2)+6>0$$

すると，$2(k^2+7)>(k+1)^2+7$ から，$2^{k+1}>(k+1)^2+7$

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，6 以上の整数 n に対して，$2^n > n^2+7$ が成り立つ。

(2) 素数 p, q に対して，$p^q=q^p+7$ ………①

(i) $p=2$ のとき　①から $2^q=q^2+7$ ………②

(1)から $q \geqq 6$ すなわち 7 以上の素数について，$2^q>q^2+7$ となり②は成立しない。そこで，$q=2,\ 3,\ 5$ のときを調べる。

(a) $q=2$ のとき　$2^q=4$，$q^2+7=11$ となり，②は成立しない。

(b) $q=3$ のとき　$2^q=8$，$q^2+7=16$ となり，②は成立しない。

(c) $q=5$ のとき　$2^q=32$，$q^2+7=32$ となり，②は成立する。

(ii) $p \geqq 3$ のとき　p は奇数となり，$q \geqq 3$ すなわち q も奇数の場合については，p^q，q^p はともに奇数から，①は両辺の偶奇が異なり，成立しない。

そこで，$q=2$ のときについて，①から $p^2=2^p+7$ ………③

(1)から $p \geqq 6$ すなわち 7 以上の素数について，$2^p+7>(p^2+7)+7$ となり③は成立しない。そこで，$p=3,\ 5$ のときを調べる。

(a) $p=3$ のとき　$p^2=9$，$2^p+7=15$ となり，③は成立しない。

(b) $p=5$ のとき　$p^2=25$，$2^p+7=39$ となり，③は成立しない。

(i)(ii)より，①を満たす素数 p, q は，$(p,\ q)=(2,\ 5)$ のみである。

［解　説］

素数が題材の誘導つき不定方程式の問題です。素数で偶数なのは 2 だけということがポイントになっています。なお，(2)で p^q と q^p の偶奇が異なる点に注目すると，少し解答例を短縮できます。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　n が素数のとき，n より小さい自然数 $n-1$，$n-2$，$n-3$，$\cdots$，3，2，1 は，いずれも n と互いに素である。

すると，それらの数の積 $(n-1)!$ は n と互いに素になり，n で割り切れない。

また，$n=4$ のとき $(n-1)!=3!=6$ は n で割り切れない。

(2)　素数でなくかつ 4 でもない n は，6 以上の合成数であり，

(i)　$n=pq$ (p は 2 以上の自然数，q は 3 以上の自然数，$p\neq q$)のとき

$(n-1)!=(pq-1)(pq-2)(pq-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ となり，$pq-p=p(q-1)$ は p の倍数，$pq-q=q(p-1)$ は q の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=pq$ で割り切れる。

(ii)　$n=r^2$ (r は 3 以上の素数)のとき

$(n-1)!=(r^2-1)(r^2-2)(r^2-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ となり，$r^2-r=r(r-1)$ は r の倍数，$r^2-2r=r(r-2)$ は r の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=r^2$ で割り切れる。

(i)(ii)より，n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

［解　説］

整数からむ証明問題です。方針を立てるために，まず具体例を考え，それを一般化して解答例を作りました。

15　［京都大・理］

素数 $p,\ q$ に対して，$n=p^q+q^p$ とおく。ここで，n が素数である $p,\ q$ の条件を求めるとき，対称性から $p\leqq q$ としても一般性は失われない。

まず，p が 3 以上のときは，素数 $p,\ q$ はともに奇数になり，p^q，q^p もともに奇数である。よって，n は偶数となり素数ではない。

これより，$p=2$ となり，$n=2^q+q^2$ と表される。

さらに，$q=2$ のときは，$n=2^2+2^2=8$ となり，n は素数ではない。

また，$q=3$ のときは，$n=2^3+3^2=17$ となり，n は素数となる。

さて，q が 5 以上の素数のとき，2 の倍数でもなく，かつ 3 の倍数でもないことに着目すると，k を自然数として，$q=6k\pm1$ と表せる。

(i)　$q=6k+1$ のとき

$$n=2^{6k+1}+(6k+1)^2=2\cdot64^k+36k^2+12k+1$$

ここで，N_1 を整数とすると，$64^k=(3\cdot21+1)^k=3N_1+1$ となるので，

$$n=2(3N_1+1)+36k^2+12k+1=3(2N_1+12k^2+4k+1)$$

よって，n は 3 の倍数となり，素数ではない。

(ii)　$q=6k-1$ のとき

$$n=2^{6k-1}+(6k-1)^2=32\cdot64^{k-1}+36k^2-12k+1$$

ここで，N_2 を整数とすると，$64^{k-1}=(3\cdot21+1)^{k-1}=3N_2+1$ となるので，

$$n=32(3N_2+1)+36k^2-12k+1=3(32N_2+12k^2-4k+11)$$

よって，n は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)(ii)より，q が 5 以上の素数のとき，n は素数にならない。

以上より，p^q+q^p と表される素数は 17 だけである。

［解　説］

演習しておきたい素数がらみの整数問題です。まず，2 以外の素数は奇数という頻出事項でふるいにかけて p の値を決め，次に q の値を 2, 3, 5, 7, 11 として n の値を計算すると，5 以上では 3 の倍数であることがわかります。ただ，q が奇数ということだけでは，$q=9$ で n が素数となることから考え直し，その結果，q を 6 で割った余りで分類とした解答例となったわけです。なお，二項展開を用いる箇所は，省略気味に記しています。

16　　　　［名古屋大・文］

(1)　k を正の整数, p を 3 以上の素数とするとき, $2^k p$ の正の約数は,

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^k,\ p,\ 2p,\ 2^2p,\ \cdots,\ 2^kp$$

したがって, その和 $s(2^kp)$ は,

$$s(2^kp)=(1+2+2^2+\cdots+2^k)(1+p)=\frac{2^{k+1}-1}{2-1}(1+p)=(2^{k+1}-1)(1+p)$$

(2)　$2016=2^5\cdot3^2\cdot7$ より, その正の約数の和 $s(2016)$ は,

$$s(2016)=(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2)(1+7)=63\cdot13\cdot8=6552$$

(3)　2016 の正の約数 n は, (2)から $a,\ b,\ c$ を整数として,

$$n=2^a\cdot3^b\cdot7^c\quad(0\leqq a\leqq5,\ 0\leqq b\leqq2,\ 0\leqq c\leqq1)$$

すると, n の正の約数の和 $s(n)$ は,

$$s(n)=\frac{2^{a+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{b+1}-1}{3-1}\cdot\frac{7^{c+1}-1}{7-1}=\frac{1}{12}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)$$

条件より, $s(n)=2016$ なので, $\frac{1}{12}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^5\cdot3^2\cdot7$

$$(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3^3\cdot7\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで, $2^{a+1}-1$ は奇数で $3^{b+1}-1$ と $7^{c+1}-1$ は偶数, そして $3^{b+1}-1$ と $7^{c+1}-1$ は 7 の倍数とはなりえないので, $2^{a+1}-1$ が 7 の倍数となる。

すると, $2^{a+1}-1$ の値として, $7,\ 3\cdot7,\ 3^2\cdot7,\ 3^3\cdot7$ があげられる。

(i)　$2^{a+1}-1=7$ のとき　$a=2$ となり, $(*)$は $(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3^3$

$c=0$ のとき, $3^{b+1}-1=2^6\cdot3^2$ となり, $3^{b+1}=577$ より整数 b は存在しない。

$c=1$ のとき, $3^{b+1}-1=2^3\cdot3^2$ となり, $3^{b+1}=73$ より整数 b は存在しない。

(ii)　$2^{a+1}-1=3\cdot7$ のとき　$2^{a+1}=22$ より整数 a は存在しない。

(iii)　$2^{a+1}-1=3^2\cdot7$ のとき　$a=5$ となり, $(*)$は $(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3$

$c=0$ のとき, $3^{b+1}-1=2^6$ となり, $3^{b+1}=65$ より整数 b は存在しない。

$c=1$ のとき, $3^{b+1}-1=2^3$ となり, $b=1$ である。

(iv)　$2^{a+1}-1=3^3\cdot7$ のとき　$2^{a+1}=190$ より整数 a は存在しない。

(i)～(iv)より, $(a,\ b,\ c)=(5,\ 1,\ 1)$ となり, $n=2^5\cdot3^1\cdot7^1=672$ である。

［解 説］

正の約数すべての和という頻出事項が題材になっています。(3)については, まず偶奇でふるいにかけたところ絞り込みが足らず, まだ候補が多いので, 次に 7 の倍数に注目しています。