$\boxed{2}$　［千葉大］

$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3)　$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ ［東北大］

多項式$P(x)$を，$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$により定める。ただし，$i$ は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数a_0，…，a_7をすべて求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$ に対して，$P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。

(3) (1)で求めたa_1，a_3，a_5，a_7を用いて，多項式$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1,\ 2,\ 3$ について，$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき，$Q(x_k)=0$が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$の値を求めよ。

$\boxed{4}$ ［東京大］

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。

$\boxed{5}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_1(z_1)$ とすると，$z_1=1$ である。
2. 時刻 1 に P は $\mathrm{Q}_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_2(z_2)$ とすると，$z_2=\dfrac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に，時刻 n に P は $\mathrm{Q}_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　z_3，z_4 を求めよ。

(2)　z_n を α , n を用いて表せ。

(3)　P が $\mathrm{Q}_1(z_1)$，$\mathrm{Q}_2(z_2)$，…と移動するとき，P はある点 $\mathrm{Q}(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

(4)　z_n の実部が(3)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

$\boxed{6}$ ［筑波大］

複素数平面上を動く点 z を考える。次の問いに答えよ。

(1) 等式 $|z-1|=|z+1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。

(2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。

(3) a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。

2　　　　［千葉大］

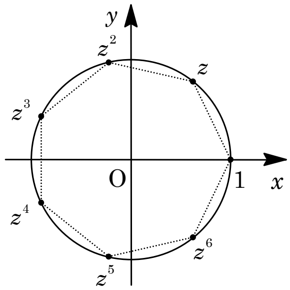
(1)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対して，$z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{z(z^6-1)}{z-1}=\frac{z^7-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1$$

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\overline{\alpha}=\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}=z^6+z^5+z^3$

$$\alpha+\overline{\alpha}=z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3=-1$$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}&=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)\\&=z^7+z^6+z^4+z^8+z^7+z^5+z^{10}+z^9+z^7\\&=3+z^6+z^4+z+z^5+z^3+z^2\\&=3-1=2\end{aligned}$$



よって，α，$\overline{\alpha}$ は２次方程式 $x^2+x+2=0$ の解より，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

そして，α の虚部は $\overline{\alpha}$ の虚部より大きいので，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ である。

(3)　$x^7=1$ の解は，$x=1$，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6 より，

$$x^7-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

そして，$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ より，

$$\begin{aligned}&x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\&=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)\ \cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

(*)に $x=1$ を代入すると，

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=7$$

［解　説］

１の n 乗根に関する超有名問題です。解答例に示した図がすべてと言っても構わない内容です。

３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1) $P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}=\dfrac{2({}_7\mathrm{C}_1x^6i+{}_7\mathrm{C}_3x^4i^3+{}_7\mathrm{C}_5x^2i^5+i^7)}{2i}$

$$=\frac{7ix^6-35ix^4+21ix^2-i}{i}=7x^6-35x^4+21x^2-1$$

ここで，$P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ から，

$$a_0=a_2=a_4=a_6=0,\ a_1=7,\ a_3=-35,\ a_5=21,\ a_7=-1$$

(2) ド・モアブルの定理を用いると，

$$P\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)=\frac{1}{2i}\Big\{\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\Big)^7-\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\Big)^7\Big\}$$

$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\big\{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7\big\}$$

$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\big\{(\cos7\theta+i\sin7\theta)-(\cos7\theta-i\sin7\theta)\big\}$$

$$=\frac{2i\sin7\theta}{2i\sin^7\theta}=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3) $P(x)=a_1x^6+a_3x^4+a_5x^2+a_7$，$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ より，$x>0$ で，

$$Q(x)=P(\sqrt{x}\,)$$

さて，$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}>0$，$\dfrac{\cos2\theta}{\sin2\theta}>0$，$\dfrac{\cos3\theta}{\sin3\theta}>0$ から，$(*)$を用いて，

$$Q(x_1)=Q\Big(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}=\frac{\sin\pi}{\sin^7\theta}=0$$

$$Q(x_2)=Q\Big(\frac{\cos^22\theta}{\sin^22\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\Big)=\frac{\sin14\theta}{\sin^72\theta}=\frac{\sin2\pi}{\sin^72\theta}=0$$

$$Q(x_3)=Q\Big(\frac{\cos^23\theta}{\sin^23\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}\Big)=\frac{\sin21\theta}{\sin^73\theta}=\frac{\sin3\pi}{\sin^73\theta}=0$$

さらに，$x_1=\dfrac{1}{\tan^2\frac{\pi}{7}}$，$x_2=\dfrac{1}{\tan^2\frac{2\pi}{7}}$，$x_3=\dfrac{1}{\tan^2\frac{3\pi}{7}}$ なので，x_1，x_2，x_3 は互いに異なる。よって，x_1，x_2，x_3 は３次方程式 $Q(x)=0$ の異なる３つの解となり，

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_3}{a_1}=5$$

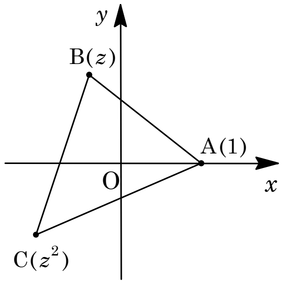
［解 説］

一見，複素数の難問という構成ですが，細かな誘導のため，それに従えば最後の結論まで導けるようになっています。ただ，いろいろな定理が絡んでいますが。

４　　［東京大］

3 点A(1)，B(z)，C(z^2)に対し，△ABC は鋭角三角形より，まず$z\neq 1$かつ$z^2\neq z$かつ$z^2\neq 1$より，

$$z\neq 0,\ z\neq \pm 1$$



さて，$\angle\mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-1}{z-1}<\dfrac{\pi}{2}$となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg(z+1)<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\{z-(-1)\}<\frac{\pi}{2}$$

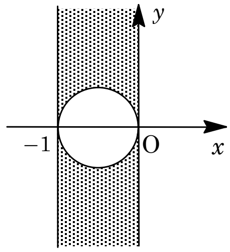
すると，zは点-1を通り実軸に垂直な直線の右側にある。

次に，$\angle\mathrm{ABC}<\dfrac{\pi}{2}$から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-z}{1-z}<\dfrac{\pi}{2}$となり，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg(-z)<\dfrac{\pi}{2}$

すると，$-z$は虚軸の右側にあるので，zは虚軸の左側にある。

さらに，$\angle\mathrm{BCA}<\dfrac{\pi}{2}$から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z-z^2}{1-z^2}<\dfrac{\pi}{2}$となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{z}{1+z}<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\frac{0-z}{-1-z}<\frac{\pi}{2}$$



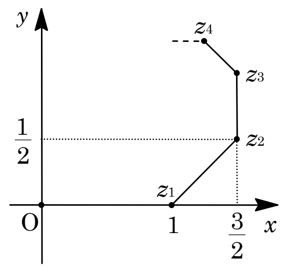
すると，zは原点と点-1を直径とする円の外部にある。

以上より，zの存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

［解　説］

複素数平面についての問題です。鋭角三角形という条件を，偏角の言葉に翻訳して処理をしました。なお，余弦定理を利用する方法も考えられます。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］



(1)　$\alpha=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$なので，点$\alpha z$は点 z を原点回りに$\dfrac{\pi}{4}$回転し，原点との距離$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$倍した点である。

すると，与えられた条件から，

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$z_3=z_2+\alpha(z_2-z_1)=\frac{3+i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1+i}{2}$$

$$=\frac{3+i}{2}+\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}$$

$$z_4=z_3+\alpha(z_3-z_2)=\frac{3+2i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}+\frac{-1+i}{4}=\frac{5+5i}{4}$$

(2)　$(*)$より，$z_{n+1}-z_n=(z_2-z_1)\alpha^{n-1}=\dfrac{1+i}{2}\alpha^{n-1}=\alpha^n$となり，$n\geqq 2$で，

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$n=1$のときも成立するので，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$である。

(3)　$n\to\infty$のとき$|\alpha^n|=|\alpha|^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\to 0$より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$となり，

$$w=\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{1-\alpha}=\frac{2}{1-i}=1+i$$

(4)　(2)より，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=(1+i)(1-\alpha^n)=(1+i)\left\{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\dfrac{n}{4}\pi+i\sin\dfrac{n}{4}\pi\right)\right\}$

ここで，z_nの実部が w の実部 1 より大きくなることより，

$$1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\frac{n}{4}\pi+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\frac{n}{4}\pi>1,\ \sin\frac{n}{4}\pi-\cos\frac{n}{4}\pi>0$$

すると，$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{n}{4}-\dfrac{1}{4}\right)\pi>0$となるので，$k$を 0 以上の整数として，

$$2k\pi<\left(\frac{n}{4}-\frac{1}{4}\right)\pi<(2k+1)\pi,\ 8k+1<n<8k+5$$

よって，$n=8k+2,\ 8k+3,\ 8k+4$である

［解 説］

複素数平面上の点の移動を題材にした頻出問題です。現行課程で復活し，日も浅いためなのか，問題文の説明が度を超えた丁寧さです。

$\boxed{6}$ ［筑波大］

(1)　$|z-1|=|z+1|$……①に対して，左辺は点 z と点 1 との距離，右辺は点 z と点 -1 との距離を表す。

これより，①を満たす点 z の全体は，点 1 と点 -1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸となる。

(2)　$w=\dfrac{z+1}{z}$ $(z\neq 0)$ より，$wz=z+1$ となり，$(w-1)z=1$ ………②

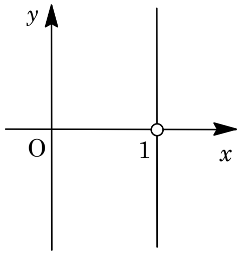
ここで，$w=1$ とすると②は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{1}{w-1}$ ………③

③を①に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{1}{w-1}+1\right|$ となり，$\left|\dfrac{2-w}{w-1}\right|=\left|\dfrac{w}{w-1}\right|$ から，

$\dfrac{|2-w|}{|w-1|}=\dfrac{|w|}{|w-1|}$，$|2-w|=|w|$

すると，点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，点 w は点 2 と点 0 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち点 1 を通り実軸に垂直な直線上を動く。ただし $w\neq 1$ から点 1 は除く。

図示すると，右図のようになる。



(3)　$a>0$ で $w=\dfrac{z+1}{z-a}$ より，$w(z-a)=z+1$ となり，$(w-1)z=aw+1$ ………④

ここで，$w=1$ とすると④は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{aw+1}{w-1}$ ………⑤

⑤を①に代入すると，$\left|\dfrac{aw+1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{aw+1}{w-1}+1\right|$ となり，

$\left|\dfrac{(a-1)w+2}{w-1}\right|=\left|\dfrac{(a+1)w}{w-1}\right|$，$|(a-1)w+2|=|(a+1)w|$

両辺を2乗して，$|(a-1)w+2|^2=(a+1)^2|w|^2$ より，

$\{(a-1)w+2\}\{(a-1)\overline{w}+2\}=(a+1)^2w\overline{w}$

$4aw\overline{w}-2(a-1)w-2(a-1)\overline{w}=4$，$w\overline{w}-\dfrac{a-1}{2a}w-\dfrac{a-1}{2a}\overline{w}=\dfrac{1}{a}$ ………⑥

⑥より，$\left(w-\dfrac{a-1}{2a}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{a-1}{2a}\right)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{(a-1)^2}{4a^2}$ となり，

$\left|w-\dfrac{a-1}{2a}\right|^2=\dfrac{(a+1)^2}{4a^2}$，$\left|w-\dfrac{a-1}{2a}\right|=\dfrac{a+1}{2a}$

よって，点 z が虚軸上を動くとき，点 w は中心 $\dfrac{a-1}{2a}$ で半径 $\dfrac{a+1}{2a}$ の円を描く。ただし，$w\neq 1$ から点 1 は除く。

［解　説］

複素数平面上の変換を問う問題です。(1)において，まず①を変形して，$z+\overline{z}=0$ という関係を導き，この式をもとに(2), (3)を解くという方法もあります。