2　　　　［金沢大］

曲線$C: x^2+4y^2=4$上を動く点 P と，C 上の定点Q(2, 0)，R(0, 1)がある。次の問いに答えよ。

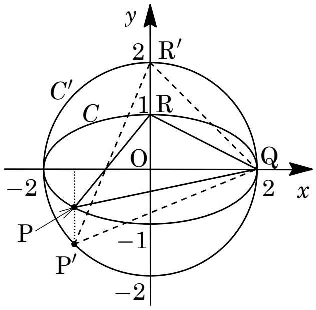
(1) △PQR の面積の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき，直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大］

(1)　まず，楕円 $C: x^2+4y^2=4$ を y 軸方向に 2 倍拡大して，円 $C': x^2+y^2=4$ をつくるとする。

このとき，点 P は P'，点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ は $\mathrm{R}'(0,\ 2)$ に対応し，点 $\mathrm{Q}(2,\ 0)$ の位置は変わらない。



すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{P'QR'}$ より，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積が最大になるのは，$\triangle\mathrm{P'QR'}$ の面積が最大のときである。

このときの点 P' の座標は，直線 $y=x$ に関する対称性から，$\mathrm{P}'\left(2\cos\dfrac{5}{4}\pi,\ 2\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$ すなわち $\mathrm{P}'(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ である。また最大値は，

$$\triangle\mathrm{P'QR'}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

よって，$\triangle\mathrm{PQR}$ は $\mathrm{P}\left(-\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のときに最大となり，最大値は，

$$\frac{1}{2}(2+2\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$$

(2)　(1)と同様にして，円 C' の内側で直線 $\mathrm{P'Q}$ の下方にある部分の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}$$

よって，楕円 C の内側で直線 PQ の下方にある部分の面積は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

［解 説］

楕円を円に変換して処理する解法を採用しました。そうすると，計算はほとんど不要といってよいぐらいの解答例になります。