

2

[新潟大]

一般項が $a_n = \frac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。
- (3) 2 以上の整数 k に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{kn}}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。

3

[大阪大]

円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び、円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。 $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{CD} = \vec{c}$ とおき、 \vec{a} の大きさを x とする。

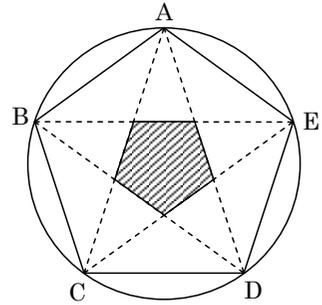
(1) \overline{AC} の大きさを y とするとき、 $x^2 = y(y-x)$ が成り立つことを示せ。

(2) \overline{BC} を \vec{a} , \vec{c} を用いて表せ。

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。 R_2 の 1 辺の長さを x を用いて表せ。

(4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし、 R_n の面積を S_n とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k \text{ を求めよ。}$$



斜線部分が R_2

2

[新潟大]

(1) $n \geq 2$ のとき, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n \leq 1 \cdot n \cdot n \cdots n \cdot n = n^{n-1}$ となり,

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

(2) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

(3) 2 以上の整数 k に対して, $b_n = \log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log \frac{a_{kn}}{a_n}$ とおくと,

$$b_n = \frac{1}{n} \log \frac{(kn)!}{(kn)^{kn}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{n} \log \frac{(kn)!}{n!} \left(\frac{1}{k^k n^{k-1}}\right)^n = \frac{1}{n} \log \frac{(kn)!}{n!} - \log k^k n^{k-1}$$

$$= \frac{1}{n} \log\{(n+1)(n+2)\cdots(kn)\} - k \log k - (k-1) \log n$$

$$= \frac{1}{n} \{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn)\} - (k-1) \log n - k \log k$$

$$= \frac{1}{n} \{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn) - (k-1)n \log n\} - k \log k$$

$$= \frac{1}{n} \{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn) - (kn-n) \log n\} - k \log k$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \log \frac{n+1}{n} + \log \frac{n+2}{n} + \cdots + \log \frac{n+(k-1)n}{n} \right\} - k \log k$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \log\left(1 + \frac{(k-1)n}{n}\right) \right\} - k \log k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \int_0^{k-1} \log(1+x) dx - k \log k$$

$$= \left[(1+x) \log(1+x) \right]_0^{k-1} - \int_0^{k-1} dx - k \log k$$

$$= k \log k - (k-1) - k \log k = 1 - k$$

よって, $\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{b_n}$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{1-k}$ である。

[解説]

誘導のない極限の設問 3 題で構成されています。しかも, 各問の相互関係もあまり感じられません。

3

[大阪大]

- (1) 5点 A, B, C, D, E は円周を 5 等分しているので,

$$\angle ABE = \angle EBD = \angle DBC = \angle BAC = \angle BCA$$

これより、右図のように、対角線の交点を F, G, H, I, J とおくと、 $\triangle ABC$ と $\triangle AIB$ は相似となり、

$$AB : AI = AC : AB \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\angle BAC + \angle ABE = \angle EBD + \angle DBC$ であるので、 $\angle CIB = \angle CBI$ となり、 $|\overline{AB}| = x$ 、 $|\overline{AC}| = y$ とすると、

$$AI = AC - CI = AC - CB = y - x \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より、} x : (y - x) = y : x \text{ となり、} x^2 = y(y - x) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

- (2)
- $\textcircled{3}$
- より、
- $y^2 - xy - x^2 = 0$
- となり、
- $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x \cdots \cdots \textcircled{4}$

また、 $AD \parallel BC$ 、 $AD = y$ 、 $BC = x$ なので、 $\textcircled{4}$ から $\overline{AD} = \frac{y}{x}\overline{BC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\overline{BC}$

すると、 $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ から、 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\overline{BC} = \vec{a} + \overline{BC} + \vec{c}$ となり、

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\overline{BC} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \overline{BC} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

- (3)
- R_2
- の 1 辺 IJ の長さは、
- $IJ = AJ - AI = x - (y - x) = 2x - y$
- となるので、
- $\textcircled{4}$
- から、

$$IJ = 2x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x$$

- (4) 相似な図形
- R_{n+1}
- と
- R_n
- の面積比は、(3)より
- $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$
- であるので、

$$S_{n+1} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}S_n$$

すると、 $\frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k = \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_1 \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k = \frac{1}{1 + \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{9 - 3\sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{6}$$

[解説]

正五角形を題材とした有名問題です。三角関数をベースに考えなくてもよいように、相似に着目させる誘導がついています。

