8 ［筑波大・理］

$a,\ b,\ c$ を実数とし，β, m をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1) a, b, c および β, m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。

９　　［広島大・理］

$a>0$とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数$f(t)=t^3-2at+1$の区間$t\geqq 0$における最小値を，aを用いて表せ。

(2) (1)で求めた最小値が0となるときのaの値をAとおく。A^3を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線$y=x^4$をC_1，点$(0,\ a)$を中心とする半径aの円をC_2とする。C_1とC_2の共有点の個数を調べよ。

(4) 座標平面において，点Pが曲線$y=x^4$上を動くときの点Pと点$(0,\ a)$の距離の最小値を考える。その最小値がaに等しくなるようなaの値の範囲を求めよ。

10 ［金沢大・文］

$a>0$ とし，放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える。C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P の x 座標を s とするとき，A と B を a と s を用いて表せ。

(2) 接線 l は，原点 O$(0,\ 0)$ を通り，傾きは正であるとする。このとき，l の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) $\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

11 ［名古屋大・文］

a を正の定数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。

8 ［筑波大・理］

(1) 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta\ (0<\beta<1)$ で極値をとるので，$f'(\beta)=f'(-\beta)=0$ となり，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ から，

$$f'(x)=3(x+\beta)(x-\beta)=3x^2-3\beta^2$$

すると，k を定数として，$f(x)=x^3-3\beta^2x+k$ である。

さて，条件より，$m>0$ で，$f(-1)=f(\beta)=-m$ より，

$$-1+3\beta^2+k=-m\cdots\cdots\text{①},\ -2\beta^3+k=-m\cdots\cdots\text{②}$$

また，$f(1)=f(-\beta)=m$ より，

$$1-3\beta^2+k=m\cdots\cdots\text{③},\ 2\beta^3+k=m\cdots\cdots\text{④}$$

②④より，$k=0$，$m=2\beta^3$ となり，①③に代入すると①と③は一致し，

$$2\beta^3+3\beta^2-1=0,\ (2\beta-1)(\beta+1)^2=0$$

すると，$0<\beta<1$ から $\beta=\dfrac{1}{2}$ となり，$m=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

そして，$f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x$ から，$a=0$，$b=-\dfrac{3}{4}$，$c=0$

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき $-m\leqq g(x)\leqq m$ を満たし，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，

$$h(-1)=f(-1)-g(-1)=-m-g(-1)\leqq 0\cdots\cdots\text{⑤}$$

$$h(-\beta)=f(-\beta)-g(-\beta)=m-g(-\beta)\geqq 0\cdots\cdots\text{⑥}$$

$$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=-m-g(\beta)\leqq 0\cdots\cdots\text{⑦}$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=m-g(1)\geqq 0\cdots\cdots\text{⑧}$$

ここで，$h(x)$ は 2 次以下の関数となり，$h(x)=sx^2+tx+u$ とおくと，⑤⑧より，

$$s-t+u\leqq 0\cdots\cdots\text{⑨},\ s+t+u\geqq 0\cdots\cdots\text{⑩}$$

そして，$\beta=\dfrac{1}{2}$ から，⑥⑦より，

$$\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}t+u\geqq 0\cdots\cdots\text{⑪},\ \frac{1}{4}s+\frac{1}{2}t+u\leqq 0\cdots\cdots\text{⑫}$$

すると，⑩－⑨から $t\geqq 0$，⑫－⑪から $t\leqq 0$ となるので，$t=0$ である。

これより，⑨から $s+u\leqq 0$，⑩から $s+u\geqq 0$ となるので，$s+u=0\cdots\cdots$⑬

さらに，⑪から $\dfrac{1}{4}s+u\geqq 0$，⑫から $\dfrac{1}{4}s+u\leqq 0$ となるので，$\dfrac{1}{4}s+u=0\cdots\cdots$⑭

⑬⑭より，$s=u=0$ となり，以上より $h(x)=0$ である。

［解 説］

微分の応用問題です。なお，(2)は図を書くと結論は明らかなのですが，それを示すのは……。ということで，数式を用いて処理をしました。

9　　　　［広島大・理］

(1)　$a>0$ のとき，$f(t)=t^3-2at+1$ に対して，

$$f'(t)=3t^2-2a$$

$t\geqq 0$ において $f(t)$ の増減を調べると，右表のようになり，最小値は,

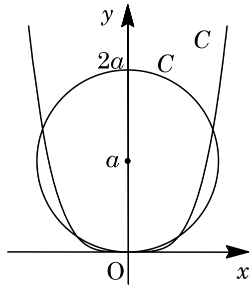
t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	1	↘		↗

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)=\left(\frac{2a}{3}-2a\right)\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{3}a\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{9}a\sqrt{6a}+1$$

(2)　条件より，$-\dfrac{4}{9}A\sqrt{6A}+1=0$ となるので，$\dfrac{4}{9}A\sqrt{6A}=1$ から,

$$\frac{16\cdot 6}{81}A^3=1,\ A^3=\frac{81}{16\cdot 6}=\frac{27}{32}$$

(3)　$C_1: y=x^4$ ……①，$C_2: x^2+(y-a)^2=a^2$ ……②を連立し,



$$x^2+(x^4-a)^2=a^2,\ x^8-2ax^4+x^2=0$$

ここで，$x^2=t\geqq 0$ とおくと，$t^4-2at^2+t=0$ から,

$$t(t^3-2at+1)=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，$t=0$ ……④または $t^3-2at+1=0$ ……⑤

さて，(1)から⑤は $f(t)=0$ となり，しかも $t\neq 0$ である。

また，(2)から $A=\sqrt[3]{\dfrac{27}{32}}=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ となるので，C_1 と C_2 の共有点の個数は,

(i)　$-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1>0\ \left(0<a<\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の実数解は 0 個なので，③の実数解は④の $t=0$ のみとなる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は 1 である。

(ii)　$-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1=0\ \left(a=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 1 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 2 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+1\times 2=3$ である。

(iii)　$-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1<0\ \left(a>\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 2 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 3 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+2\times 2=5$ である。

(4)　C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^4)$ と点 $(0,\ a)$ の距離を d とおくと,

$$d^2=p^2+(p^4-a)^2=p^8-2ap^4+p^2+a^2$$

ここで，$p^2=t\geqq 0$ とおくと，$d^2=t^4-2at^2+t+a^2=tf(t)+a^2$

さて，d^2 の最小値は a^2 なので，$t\geqq 0$ において $tf(t)\geqq 0$ すなわち $f(t)\geqq 0$ が必要となり，(3)から，$0<a\leqq\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ である。

逆に，このとき $t=0$ で $tf(t)=0$ となるので，d^2 の最小値は a^2 である。

以上より，求める条件は$0 < a \leqq \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$である。

［解 説］

微分の応用についての問題です。(3)では x を消去するか，y を消去するか迷いますが，(1)を誘導とみると後者に落ち着きます。また，t の個数と x の個数の対応関係に注意が必要です。なお，(4)の結論は(3)から明らかですが，その過程も念のため記しておきました。重複しますが。

$\boxed{10}$ ［金沢大・文］

(1) $C: y=a(x-1)^2+1\ (a>0)$ に対して，$\mathrm{P}(s,\ a(s-1)^2+1)$ における接線 l の方程式は，$y'=2a(x-1)$ から，$y-\{a(s-1)^2+1\}=2a(s-1)(x-s)$ となり，

$$y=2a(s-1)x-as^2+a+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$(*)$が $y=Ax+B$ に一致するので，

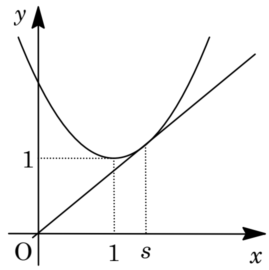
$$A=2a(s-1),\ B=-as^2+a+1$$

(2) 条件より，$A=2a(s-1)>0$ から $s>1$ となり，また $B=-as^2+a+1=0$ より，

$$s^2=\frac{a+1}{a},\ s=\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

すると，$A=2a\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}-1\right)=2\left(\sqrt{a(a+1)}-a\right)$ から，

$$l: y=2\left(\sqrt{a(a+1)}-a\right)x$$



(3) l と C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_0^s\{a(x-1)^2+1-2a(s-1)x\}dx\\&=\int_0^s(ax^2-2asx+a+1)dx\\&=\left[\frac{a}{3}x^3-asx^2+(a+1)x\right]_0^s=\frac{a}{3}s^3-as^3+(a+1)s\\&=\left(-\frac{2}{3}a\cdot\frac{a+1}{a}+a+1\right)\sqrt{\frac{a+1}{a}}=\frac{1}{3}(a+1)\sqrt{\frac{a+1}{a}}\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a+1}{\sqrt[4]{a}}\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}=\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{(a+1)^6}{a^3}}$ となり，

$$\frac{(a+1)^6}{a^3}=\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}\right)^6=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^6\geqq\left(2\sqrt{\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^6=2^6$$

ここで，等号は $\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，すなわち $a=1$ のときに成立する。

したがって，$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ は $a=1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{2^6}=\dfrac{1}{3}\cdot2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる。

［解 説］

微積分の総合問題です。(3)で被積分関数が $a(x-s)^2$ となることに気付けば，計算が少し簡単になります。また，(4)では求めた式を 4 乗根の中に入れてしまうと，相加平均と相乗平均の出番になります。

11　　［名古屋大・文］

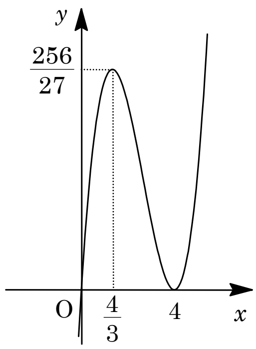
(1)　$g(x)=x(x-4)^2$ に対して,

$$g'(x)=(x-4)^2+2x(x-4)=(x-4)(3x-4)$$

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

すると，$g(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $\dfrac{256}{27}$ $\left(x=\dfrac{4}{3}\right)$，極小値は 0 $(x=4)$ である。

また, グラフの概形は右図のようになる。



(2)　$f(x)=ax^2\ (a>0)$ に対し，$g(x)=f(x)$ とおくと,

$$x(x-4)^2=ax^2,\ \ x\{x^2-(a+8)x+16\}=0$$

これより，$x=0$，$x^2-(a+8)x+16=0$ ……①となる。

ここで, $x=0$ は①を満たさず, 判別式 D は,

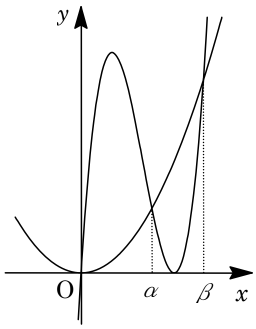
$$D=(a+8)^2-64=a(a+16)>0$$

したがって, $g(x)=f(x)$ は異なる 3 つの実数解をもつ。すなわち, 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わる。

(3)　①の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと,

$$\alpha+\beta=a+8\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ \alpha\beta=16\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで, 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるので,



$$\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}dx=0$$

よって, $\displaystyle\int_0^{\beta}\{g(x)-f(x)\}dx=0$ ……④となり, ④の左辺を I とおくと,

$$I=\int_0^{\beta}\{x^3-(a+8)x^2+16x\}dx=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{a+8}{3}x^3+8x^2\Big]_0^{\beta}$$

$$=\frac{\beta^4}{4}-\frac{a+8}{3}\beta^3+8\beta^2=\frac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-4(a+8)\beta+96\}$$

すると, $\beta>0$ なので, ④から, $3\beta^2-4(a+8)\beta+96=0$ ………⑤

そこで, ②⑤から $3\beta^2-4(\alpha+\beta)\beta+96=0$ となり, $-\beta^2-4\alpha\beta+96=0$

③を代入すると $-\beta^2-64+96=0$ となり, $\beta^2=32$ から $\beta=4\sqrt{2}$ である。

そして, ③から $\alpha=\dfrac{16}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ なので, ②から,

$$a=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-8=6\sqrt{2}-8$$

このとき，2 つの曲線の交点の x 座標は，$x=0$，α，β から，

$$x=0,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}$$

［解 説］

定積分と面積に関する有名な設定が題材になっています。ポイントは④式を導くところで，それ以降は②③⑤の連立方程式を解いているにすぎません。