

10

[千葉大・理]

t を 0 以上の実数とし、 O を原点とする座標平面上の 2 点 $P(p, p^2)$ 、 $Q(q, q^2)$ で 3 つの条件 $PQ=2$ 、 $p < q$ 、 $p+q=\sqrt{t}$ を満たすものを考える。 $\triangle OPQ$ の面積を S とする。ただし、点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S=0$ とする。

- (1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。
- (2) S を t を用いて表せ。
- (3) $S=1$ となるような t の個数を求めよ。

11

[東北大・理]

a, b を実数とする。 $y = |x^2 - 4|$ で表される曲線を C とし、 $y = ax + b$ で表される直線を l とする。

- (1) l が点 $(-2, 0)$ を通り、 l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。
- (2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 (a, b) の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

12

[一橋大]

正の実数 a, b, c は $a + b + c = 1$ を満たす。連立不等式 $|ax + by| \leq 1$, $|cx - by| \leq 1$ の表す xy 平面の領域を D とする。 D の面積の最小値を求めよ。

10

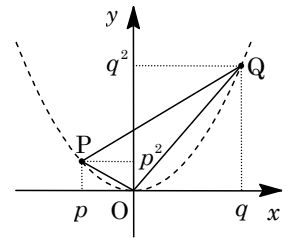
[千葉大・理]

- (1) 点 $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ ($p < q$) に対して, $PQ = 2$ より,
 $(q-p)^2 + (q^2 - p^2)^2 = 4$, $(q-p)^2 \{1 + (q+p)^2\} = 4$
 ここで, $p+q = \sqrt{t}$ ($t \geq 0$) ……①より,

$$(q-p)^2(1+t) = 4, \quad q-p = \frac{2}{\sqrt{1+t}} \dots\dots\dots ②$$

$$\text{①②より, } q = \frac{1}{2} \left(\sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{1+t}} \right) = \frac{\sqrt{t}}{2} + \frac{1}{\sqrt{1+t}} \dots\dots\dots ③$$

$$p = \frac{1}{2} \left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{1+t}} \right) = \frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \dots\dots\dots ④$$



- (2) $\triangle OPQ$ の面積を S とすると, ③④より,

$$S = \frac{1}{2} |pq^2 - p^2q| = \frac{1}{2} |pq(q-p)| = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{t}{4} - \frac{1}{1+t} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{1+t}} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+t}} \left| \frac{t^2 + t - 4}{4(1+t)} \right| = \frac{|t^2 + t - 4|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}$$

- (3) 条件より $S = 1$ なので, $\frac{|t^2 + t - 4|}{4(1+t)\sqrt{1+t}} = 1$ となり,

$$|t^2 + t - 4| = 4(1+t)\sqrt{1+t}, \quad (t^2 + t - 4)^2 = 16(1+t)^3 \dots\dots\dots ⑤$$

⑤を展開してまとめると, $t^4 - 14t^3 - 55t^2 - 56t = 0$ となり,

$$t = 0 \dots\dots\dots ⑥, \quad t^3 - 14t^2 - 55t - 56 = 0 \dots\dots\dots ⑦$$

ここで, $f(t) = t^3 - 14t^2 - 55t - 56$ とおくと,

$$f'(t) = 3t^2 - 28t - 55 = (t-11)(3t+5)$$

すると, $f(t)$ の増減は右表のようになり,

$t > 0$ において⑦の解はただ 1 つ存在する。

t	0	…	11	…
$f'(t)$		–	0	+
$f(t)$	–56	↘		↗

以上より, ⑤の解すなわち $S = 1$ となる t の個数は, ⑥を合わせて 2 である。

[解説]

放物線を題材にした図形と式についての問題です。(3)では, 同値変形とはいうものの, 両辺を 2 乗して 4 次方程式⑤を導く段階で少し躊躇しましたが, $t = 0$ が解の 1 つであることがわかり……。

11

[東北大・理]

(1) $C: y = |x^2 - 4|$ に対して,

$$y = x^2 - 4 \quad (x \leq -2, 2 \leq x) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

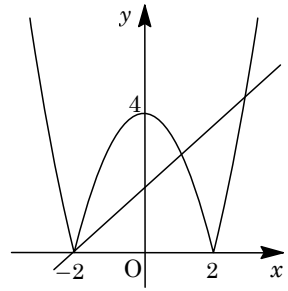
$$y = -x^2 + 4 \quad (-2 < x < 2) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また, $l: y = ax + b \cdots \cdots \textcircled{3}$ が点 $(-2, 0)$ を通ることより,

$$-2a + b = 0, \quad b = 2a$$

ここで, $\textcircled{2}$ より $y' = -2x$ となり, $x = -2$ のとき $y' = 4$ から, l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ l の傾き a の範囲は, $0 < a < 4$ である。

よって, 求める a, b の条件は, $b = 2a \quad (0 < a < 4)$ である。



(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ条件は, l と x 軸の交点に注目して,

(i) l が点 $(-2, 0)$ を通るとき (1) より, $b = 2a \quad (0 < a < 4)$

(ii) l が点 $(2, 0)$ を通るとき (1) と同様に, $2a + b = 0$ より $b = -2a$

そして, $\textcircled{2}$ より $x = 2$ のとき $y' = -4$ から, l の傾き a の範囲が $-4 < a < 0$ となり, まとめると, $b = -2a \quad (-4 < a < 0)$ である。

(iii) l が点 $(-2, 0), (2, 0)$ 以外の点を通るとき

x 軸との交点が $-2 < x < 2$ のときは, l と C が 3 つの共有点をもつ場合はない。

x 軸との交点が $x < -2, 2 < x$ のとき, および x 軸と交点をもたないときは, l と C が $-2 < x < 2$ で接するときである。

$$\textcircled{2} \textcircled{3} \text{ を連立して, } -x^2 + 4 = ax + b \text{ より, } x^2 + ax + b - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4}$ が $-2 < x < 2$ に重解をもつことより,

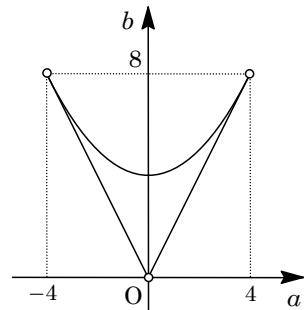
$$D = a^2 - 4(b - 4) = 0, \quad -2 < -\frac{a}{2} < 2$$

よって, $b = \frac{a^2}{4} + 4 \quad (-4 < a < 4)$ となる。

このとき, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ は 2 交点をもつ。

(i) ~ (iii) より, 点 (a, b) の軌跡は右図の実線部になる。

ただし, 原点と 2 点 $(\pm 4, 8)$ は含まない。



[解説]

絶対値付き関数のグラフと直線の位置関係に関する問題です。まず図を書き, それをもとに計算をしています。

12

[一橋大]

$a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 1$ に対し, $|ax + by| \leq 1$ ……①より,

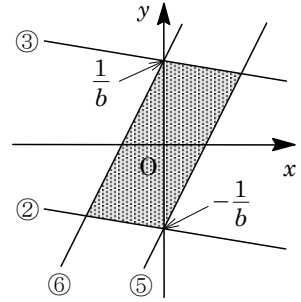
$$-1 \leq ax + by \leq 1, \quad -\frac{a}{b}x - \frac{1}{b} \leq y \leq -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$$

境界線は, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{1}{b}$ ……②, $y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$ ……③

また, $|cx - by| \leq 1$ ……④より,

$$-1 \leq cx - by \leq 1, \quad \frac{c}{b}x - \frac{1}{b} \leq y \leq \frac{c}{b}x + \frac{1}{b}$$

境界線は, $y = \frac{c}{b}x - \frac{1}{b}$ ……⑤, $y = \frac{c}{b}x + \frac{1}{b}$ ……⑥



①かつ④の表す領域 D は, 直線②と③, および直線⑤と⑥が, 平行で, しかも原点対称であることより, 右上図の平行四辺形の内部または辺上となる。

そして, 直線③と⑤を連立すると, $-\frac{a}{b}x + \frac{1}{b} = \frac{c}{b}x - \frac{1}{b}$ より,

$$(a+c)x = 2, \quad x = \frac{2}{a+c}$$

よって, 領域 D の面積を S とおくと, 対称性より,

$$S = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{2}{a+c} \right) = \frac{4}{b(a+c)} = \frac{4}{b(1-b)} = \frac{4}{-b^2 + b}$$

ここで, $f(b) = -b^2 + b$ とおくと, $f(b) = -\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ より, $0 < b < 1$ において,

$$0 < f(b) \leq \frac{1}{4} \quad (\text{等号は } b = \frac{1}{2} \text{ のとき成立})$$

したがって, S は $b = \frac{1}{2}$ のとき最小値 16 をとる。

[解説]

領域についての問題です。ただ, 平行四辺形の 1 つの対角線が y 軸上にあったり, また面積が 1 文字で表せたり, かなり解きやすい設定になっています。