$\boxed{6}$ ［千葉大・文］

座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(9,\ 0)$ がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle\mathrm{PAQ}=90^\circ$ となるようにとる。ただし，点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。$\angle\mathrm{APQ}=\theta$ とし，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を S とする。

(1) S を θ を用いて表せ。

(2) S の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

(3) S が $\triangle\mathrm{AOB}$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

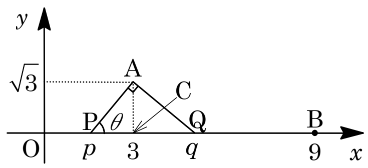
$\triangle$ABC は鋭角三角形であり，$\angle A = \dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また$\triangle$ABC の外接円の半径は 1 であるとする。

(1)　$\triangle$ABC の内心を P とするとき，$\angle$BPC を求めよ。

(2)　$\triangle$ABC の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・文］

(1)　O$(0,\ 0)$，A$(3,\ \sqrt{3})$，B$(9,\ 0)$に対し，線分 OB 上に点 P$(p,\ 0)$，Q$(q,\ 0)$があり，$\angle\mathrm{PAQ}=90°$を満たしている。ただし，$0\leqq p<3<q\leqq 9$である。



$\angle\mathrm{APQ}=\theta$とすると，$\mathrm{AP}\sin\theta=\sqrt{3}$ ………①

$$\mathrm{AQ}\sin(90°-\theta)=\sqrt{3}\,,\ \ \mathrm{AQ}\cos\theta=\sqrt{3}\ \text{………②}$$

ここで，$\triangle\mathrm{APQ}$の面積をSとすると，①②から，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}=\frac{3}{\sin 2\theta}$$

(2)　まず，(1)から$S=\dfrac{3}{\sin 2\theta}\geqq 3$である。ここで，等号が成立するのは$\sin 2\theta=1$，すなわち$\theta$は鋭角から$\theta=45°$のときである。

このとき，$\triangle\mathrm{APQ}$ は直角二等辺三角形となり，C$(3,\ 0)$とおくと$\mathrm{PC}=\mathrm{QC}=\sqrt{3}$から，P, Q はともに線分 OB 上にある。

よって，S の最小値は 3 であり，このとき P の x 座標は$3-\sqrt{3}$，Q の x 座標は$3+\sqrt{3}$となる。

(3)　まず，$\triangle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{3}=\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$となり，条件より$S=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{AOB}$から，

$$\frac{3}{\sin 2\theta}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3}\,,\ \ \sin 2\theta=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \text{………③}$$

ここで，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$なので，③と合わせると，

$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\sqrt{3}\,,\ \ \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=2\sqrt{3}\,,\ \ \tan^2\theta-2\sqrt{3}\tan\theta+1=0$$

よって，$\tan\theta=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$ ……④となる。

さて，$\mathrm{PC}=\sqrt{3}\tan(90°-\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\theta}$，$\mathrm{QC}=\sqrt{3}\tan\theta$で，条件から，$0<\mathrm{PC}\leqq 3$，$0<\mathrm{QC}\leqq 6$であるので，

$$0<\frac{\sqrt{3}}{\tan\theta}\leqq 3\ \text{………⑤},\ \ 0<\sqrt{3}\tan\theta\leqq 6\ \text{………⑥}$$

⑤より$\tan\theta\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，⑥より$0<\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$となり$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$

すると，④から$\tan\theta=\sqrt{3}+\sqrt{2}$となり，このとき，

$$\mathrm{PC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=3-\sqrt{6}\,,\ \ \mathrm{QC}=\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3+\sqrt{6}$$

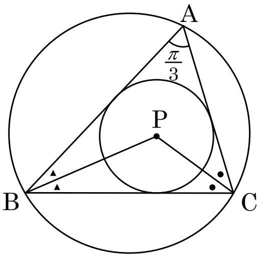
よって，P の x 座標$3-(3-\sqrt{6})=\sqrt{6}$，Q の x 座標$3+(3+\sqrt{6})=6+\sqrt{6}$である。

［解 説］

三角関数の図形への応用問題で，いろいろな解法が考えられます。

7　　　　［京都大・理］

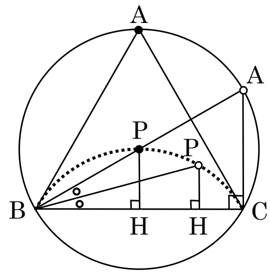
(1)　△ABC の内心を P とするとき,



$$\angle\mathrm{BPC}=\pi-(\angle\mathrm{PBC}+\angle\mathrm{PCB})$$
$$=\pi-\frac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB})=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\angle\mathrm{A})$$
$$=\pi-\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi$$

(2)　△ABC の外接円の半径は 1 から, 正弦定理より,

$$\mathrm{BC}=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$



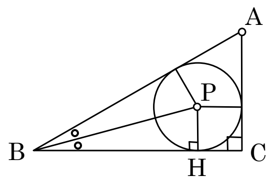
さて, △ABC は$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$である鋭角三角形である。ここで, $\triangle\mathrm{A_1BC}$を正三角形, $\triangle\mathrm{A_2BC}$を$\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$の直角三角形としたとき, 対称性から一般性を失うことなく, 点 A は右図の弧$\mathrm{A_1A_2}$上を動くとしてもよい。ただし, 点$\mathrm{A_1}$は含み, 点$\mathrm{A_2}$は含まない。

また, 点 P は$\angle\mathrm{BPC}=\frac{2}{3}\pi$から BC を弦とする点線の円弧上を動く。そして, $\mathrm{A}=\mathrm{A_1}$のとき$\mathrm{P}=\mathrm{P_1}$, $\mathrm{A}=\mathrm{A_2}$のとき$\mathrm{P}=\mathrm{P_2}$とする。さらに, $\mathrm{P_1}$から BC に垂線$\mathrm{P_1H_1}$, $\mathrm{P_2}$から BC に垂線$\mathrm{P_2H_2}$を引く。

すると, △ABC の内接円の半径rのとりうる値は, $\mathrm{P_2H_2}<r\leqq\mathrm{P_1H_1}$である。

そこで, $\angle\mathrm{P_1BH_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$から, $\mathrm{P_1H_1}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

また, $\triangle\mathrm{A_2BC}$は, $\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{AC}=1$, $\mathrm{BC}=\sqrt{3}$なので, 右図から,



$$(\sqrt{3}-\mathrm{P_2H_2})+(1-\mathrm{P_2H_2})=2,\ \mathrm{P_2H_2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

以上より, $\frac{\sqrt{3}-1}{2}<r\leqq\frac{1}{2}$である。

［解　説］

平面図形の計量についての基本的な問題です。(1)の誘導により, 内心の軌跡が導けます。