1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大・理］

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$\beta,\ m$ をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1) a,b,c および β,m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。

$\boxed{1}$　［筑波大・理］

(1) 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta\ (0<\beta<1)$ で極値をとるので，$f'(\beta)=f'(-\beta)=0$ となり，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ から，

$$f'(x)=3(x+\beta)(x-\beta)=3x^2-3\beta^2$$

すると，k を定数として，$f(x)=x^3-3\beta^2x+k$ である。

さて，条件より，$m>0$ で，$f(-1)=f(\beta)=-m$ より，

$$-1+3\beta^2+k=-m\cdots\cdots\cdots①,\ -2\beta^3+k=-m\cdots\cdots\cdots②$$

また，$f(1)=f(-\beta)=m$ より，

$$1-3\beta^2+k=m\cdots\cdots\cdots③,\ 2\beta^3+k=m\cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$k=0$，$m=2\beta^3$ となり，①③に代入すると①と③は一致し，

$$2\beta^3+3\beta^2-1=0,\ (2\beta-1)(\beta+1)^2=0$$

すると，$0<\beta<1$ から $\beta=\dfrac{1}{2}$ となり，$m=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

そして，$f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x$ から，$a=0$，$b=-\dfrac{3}{4}$，$c=0$

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき $-m\leqq g(x)\leqq m$ を満たし，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，

$$h(-1)=f(-1)-g(-1)=-m-g(-1)\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$h(-\beta)=f(-\beta)-g(-\beta)=m-g(-\beta)\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑥$$

$$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=-m-g(\beta)\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑦$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=m-g(1)\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで，$h(x)$ は２次以下の関数となり，$h(x)=sx^2+tx+u$ とおくと，⑤⑧より，

$$s-t+u\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑨,\ s+t+u\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑩$$

そして，$\beta=\dfrac{1}{2}$ から，⑥⑦より，

$$\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}t+u\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑪,\ \frac{1}{4}s+\frac{1}{2}t+u\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑫$$

すると，⑩－⑨から $t\geqq 0$，⑫－⑪から $t\leqq 0$ となるので，$t=0$ である。

これより，⑨から $s+u\leqq 0$，⑩から $s+u\geqq 0$ となるので，$s+u=0\cdots\cdots\cdots⑬$

さらに，⑪から $\dfrac{1}{4}s+u\geqq 0$，⑫から $\dfrac{1}{4}s+u\leqq 0$ となるので，$\dfrac{1}{4}s+u=0\cdots\cdots\cdots⑭$

⑬⑭より，$s=u=0$ となり，以上より $h(x)=0$ である。

［解　説］

微分の応用問題です。なお，(2)は図を書くと結論は明らかなのですが，それを示すのは……。ということで，数式を用いて処理をしました。

２ ［広島大・理］

$a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(t)=t^3-2at+1$ の区間 $t \geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2) (1)で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線 $y=x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y=x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

２ ［広島大・理］

(1) $a>0$ のとき，$f(t)=t^3-2at+1$ に対して，

$$f'(t)=3t^2-2a$$

$t\geqq 0$ において $f(t)$ の増減を調べると，右表のようになり，最小値は，

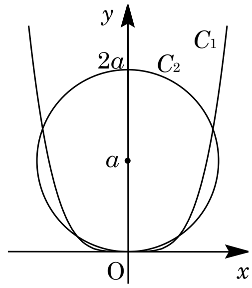
t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	1	↘		↗

$$f\Bigl(\sqrt{\frac{2a}{3}}\Bigr)=\Bigl(\frac{2a}{3}-2a\Bigr)\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{3}a\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{9}a\sqrt{6a}+1$$

(2) 条件より，$-\dfrac{4}{9}A\sqrt{6A}+1=0$ となるので，$\dfrac{4}{9}A\sqrt{6A}=1$ から，

$$\frac{16\cdot 6}{81}A^3=1,\ A^3=\frac{81}{16\cdot 6}=\frac{27}{32}$$

(3) $C_1: y=x^4$ ……①，$C_2: x^2+(y-a)^2=a^2$ ……②を連立し，



$$x^2+(x^4-a)^2=a^2,\ x^8-2ax^4+x^2=0$$

ここで，$x^2=t\geqq 0$ とおくと，$t^4-2at^2+t=0$ から，

$$t(t^3-2at+1)=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，$t=0$ ……④または $t^3-2at+1=0$ ……⑤

さて，(1)から⑤は $f(t)=0$ となり，しかも $t\neq 0$ である。

また，(2)から $A=\sqrt[3]{\dfrac{27}{32}}=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ となるので，C_1 と C_2 の共有点の個数は，

(i) $-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1>0\ \Bigl(0<a<\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\Bigr)$ のとき

⑤の実数解は 0 個なので，③の実数解は④の $t=0$ のみとなる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は 1 である。

(ii) $-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1=0\ \Bigl(a=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\Bigr)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 1 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 2 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+1\times 2=3$ である。

(iii) $-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1<0\ \Bigl(a>\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\Bigr)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 2 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 3 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+2\times 2=5$ である。

(4) C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^4)$ と点 $(0,\ a)$ の距離を d とおくと，

$$d^2=p^2+(p^4-a)^2=p^8-2ap^4+p^2+a^2$$

ここで，$p^2=t\geqq 0$ とおくと，$d^2=t^4-2at^2+t+a^2=tf(t)+a^2$

さて，d^2 の最小値は a^2 なので，$t\geqq 0$ において $tf(t)\geqq 0$ すなわち $f(t)\geqq 0$ が必要となり，(3)から，$0<a\leqq\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ である。

逆に，このとき $t=0$ で $tf(t)=0$ となるので，d^2 の最小値は a^2 である。

以上より，求める条件は$0 < a \leqq \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$である。

［解 説］

微分の応用についての問題です。(3)では x を消去するか，y を消去するか迷いますが，(1)を誘導とみると後者に落ち着きます。また，t の個数と x の個数の対応関係に注意が必要です。なお，(4)の結論は(3)から明らかですが，その過程も念のため記しておきました。重複しますが。

$\boxed{3}$ ［金沢大・文］

$a>0$ とし，放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える。C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P の x 座標を s とするとき，A と B を a と s を用いて表せ。

(2) 接線 l は，原点O$(0,\ 0)$を通り，傾きは正であるとする。このとき，l の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) $\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・文］

(1)　$C: y = a(x-1)^2+1\ (a>0)$ に対して，$\mathrm{P}(s,\ a(s-1)^2+1)$ における接線 l の方程式は，$y' = 2a(x-1)$ から，$y - \{a(s-1)^2+1\} = 2a(s-1)(x-s)$ となり，

$$y = 2a(s-1)x - as^2 + a + 1 \cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$(*)$が $y = Ax + B$ に一致するので，

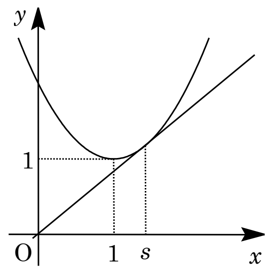
$$A = 2a(s-1),\ B = -as^2 + a + 1$$

(2)　条件より，$A = 2a(s-1) > 0$ から $s > 1$ となり，また $B = -as^2 + a + 1 = 0$ より，

$$s^2 = \frac{a+1}{a},\ s = \sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

すると，$A = 2a\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a}} - 1\right) = 2\left(\sqrt{a(a+1)} - a\right)$ から，

$$l: y = 2\left(\sqrt{a(a+1)} - a\right)x$$



(3)　l と C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は,

$$S(a) = \int_0^s \{a(x-1)^2 + 1 - 2a(s-1)x\}dx$$

$$= \int_0^s (ax^2 - 2asx + a + 1)dx$$

$$= \left[\frac{a}{3}x^3 - asx^2 + (a+1)x\right]_0^s = \frac{a}{3}s^3 - as^3 + (a+1)s$$

$$= \left(-\frac{2}{3}a\cdot\frac{a+1}{a} + a + 1\right)\sqrt{\frac{a+1}{a}} = \frac{1}{3}(a+1)\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

(4)　$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a+1}{\sqrt[4]{a}}\sqrt{\dfrac{a+1}{a}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{(a+1)^6}{a^3}}$ となり，

$$\frac{(a+1)^6}{a^3} = \left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}\right)^6 = \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^6 \geqq \left(2\sqrt{\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^6 = 2^6$$

ここで，等号は $\sqrt{a} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$，すなわち $a = 1$ のときに成立する。

したがって，$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ は $a = 1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{2^6} = \dfrac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる。

［解　説］

微積分の総合問題です。(3)で被積分関数が $a(x-s)^2$ となることに気付けば，計算が少し簡単になります。また，(4)では求めた式を 4 乗根の中に入れてしまうと，相加平均と相乗平均の出番になります。

$\boxed{4}$ ［名古屋大・文］

a を正の定数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。

4　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

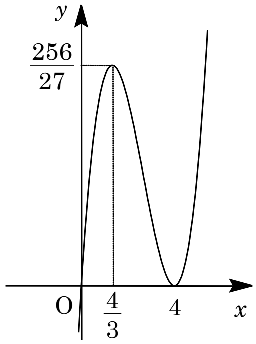
(1)　$g(x)=x(x-4)^2$ に対して,

$$g'(x)=(x-4)^2+2x(x-4)=(x-4)(3x-4)$$

すると，$g(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $\dfrac{256}{27}$ $\left(x=\dfrac{4}{3}\right)$，極小値は 0 $(x=4)$ である。

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$\frac{256}{27}$	↘	0	↗

また, グラフの概形は右図のようになる。



(2)　$f(x)=ax^2$ $(a>0)$ に対し，$g(x)=f(x)$ とおくと,

$$x(x-4)^2=ax^2,\quad x\{x^2-(a+8)x+16\}=0$$

これより，$x=0$，$x^2-(a+8)x+16=0$ ……①となる。

ここで，$x=0$ は①を満たさず, 判別式 D は,

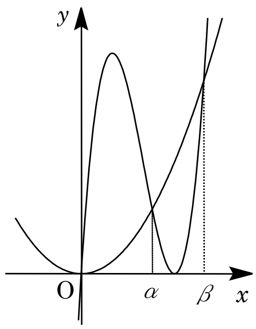
$$D=(a+8)^2-64=a(a+16)>0$$

したがって，$g(x)=f(x)$ は異なる 3 つの実数解をもつ。すなわち, 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わる。

(3)　①の解を $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと,

$$\alpha+\beta=a+8 \cdots\cdots\text{②},\quad \alpha\beta=16 \cdots\cdots\text{③}$$

ここで, 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるので,



$$\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}dx=0$$

よって，$\displaystyle\int_0^{\beta}\{g(x)-f(x)\}dx=0$ ……④となり，④の左辺を I とおくと,

$$I=\int_0^{\beta}\{x^3-(a+8)x^2+16x\}dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{a+8}{3}x^3+8x^2\right]_0^{\beta}$$

$$=\frac{\beta^4}{4}-\frac{a+8}{3}\beta^3+8\beta^2=\frac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-4(a+8)\beta+96\}$$

すると，$\beta>0$ なので, ④から，$3\beta^2-4(a+8)\beta+96=0$ ………⑤

そこで, ②⑤から $3\beta^2-4(\alpha+\beta)\beta+96=0$ となり，$-\beta^2-4\alpha\beta+96=0$

③を代入すると $-\beta^2-64+96=0$ となり，$\beta^2=32$ から $\beta=4\sqrt{2}$ である。

そして, ③から $\alpha=\dfrac{16}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ なので, ②から,

$$a=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-8=6\sqrt{2}-8$$

このとき，2 つの曲線の交点の x 座標は，$x=0$，α，β から，

$$x=0,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}$$

［解 説］

定積分と面積に関する有名な設定が題材になっています。ポイントは④式を導くところで，それ以降は②③⑤の連立方程式を解いているにすぎません。

$\boxed{5}$　［千葉大・理］

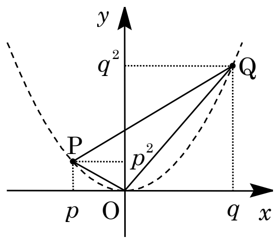
t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ で 3 つの条件 $\mathrm{PQ}=2$，$p<q$，$p+q=\sqrt{t}$ を満たすものを考える。△OPQ の面積を S とする。ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S=0$ とする。

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) $S=1$ となるような t の個数を求めよ。

5　　　　［千葉大・理］



(1)　点$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ $(p<q)$に対して，$\mathrm{PQ}=2$より，

$$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=4\,,\ (q-p)^2\{1+(q+p)^2\}=4$$

ここで，$p+q=\sqrt{t}$ $(t\geqq 0)$……①より，

$$(q-p)^2(1+t)=4\,,\ q-p=\frac{2}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{t}+\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}\Big)=\dfrac{\sqrt{t}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ ………③

$$p=\frac{1}{2}\Big(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{1+t}}\Big)=\frac{\sqrt{t}}{2}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(2)　$\triangle\mathrm{OPQ}$の面積をSとすると，③④より，

$$S=\frac{1}{2}\left|pq^2-p^2q\right|=\frac{1}{2}\left|pq(q-p)\right|=\frac{1}{2}\left|\Big(\frac{t}{4}-\frac{1}{1+t}\Big)\cdot\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\left|\frac{t^2+t-4}{4(1+t)}\right|=\frac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}$$

(3)　条件より$S=1$なので，$\dfrac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}=1$となり，

$$\left|t^2+t-4\right|=4(1+t)\sqrt{1+t}\,,\ (t^2+t-4)^2=16(1+t)^3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を展開してまとめると，$t^4-14t^3-55t^2-56t=0$となり，

$$t=0\ \cdots\cdots\cdots⑥,\ t^3-14t^2-55t-56=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，$f(t)=t^3-14t^2-55t-56$とおくと，

$$f'(t)=3t^2-28t-55=(t-11)(3t+5)$$

すると，$f(t)$の増減は右表のようになり，$t>0$において⑦の解はただ１つ存在する。

t	0	$\cdots$	11	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	-56	↘		↗

以上より，⑤の解すなわち$S=1$となるtの個数は，⑥を合わせて２である。

［解　説］

放物線を題材にした図形と式についての問題です。(3)では，同値変形とはいうものの，両辺を２乗して４次方程式⑤を導く段階で少し躊躇しましたが，$t=0$が解の１つであることがわかり……。

$\boxed{6}$ ［東北大・理］

$a,\ b$ を実数とする。$y=\left|x^2-4\right|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{6}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・理］

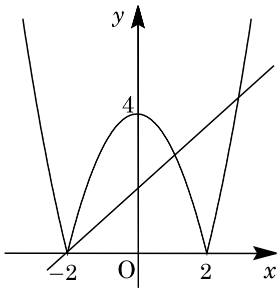
(1)　$C : y = |x^2-4|$ に対して，

$$y = x^2-4 \quad (x \leqq -2,\ 2 \leqq x) \cdots\cdots\cdots ①$$

$$y = -x^2+4 \quad (-2 < x < 2) \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$l : y = ax+b \cdots\cdots ③$が点$(-2,\ 0)$を通ることより，

$$-2a+b=0,\ b=2a$$



ここで，②より $y'=-2x$ となり，$x=-2$ のとき $y'=4$ から，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ l の傾き a の範囲は，$0<a<4$ である。

よって，求める $a,\ b$ の条件は，$b=2a\ (0<a<4)$ である。

(2)　l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ条件は，l と x 軸の交点に注目して，

(i)　l が点$(-2,\ 0)$を通るとき　(1)より，$b=2a\ (0<a<4)$

(ii)　l が点$(2,\ 0)$を通るとき　(1)と同様に，$2a+b=0$ より $b=-2a$

そして，②より $x=2$ のとき $y'=-4$ から，l の傾き a の範囲が $-4<a<0$ となり，まとめると，$b=-2a\ (-4<a<0)$ である。

(iii)　l が点$(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$以外の点を通るとき

x 軸との交点が $-2<x<2$ のときは，l と C が 3 つの共有点をもつ場合はない。

x 軸との交点が $x<-2,\ 2<x$ のとき，および x 軸と交点をもたないときは，l と C が $-2<x<2$ で接するときである。

②③を連立して，$-x^2+4=ax+b$ より，$x^2+ax+b-4=0 \cdots\cdots\cdots ④$

④が $-2<x<2$ に重解をもつことより，

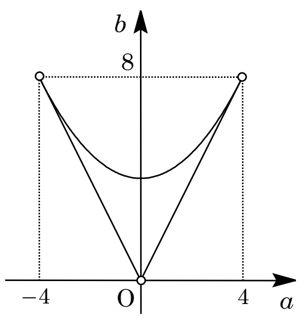
$$D=a^2-4(b-4)=0,\ -2<-\frac{a}{2}<2$$

よって，$b=\dfrac{a^2}{4}+4\ (-4<a<4)$ となる。

このとき，①と③は 2 交点をもつ。

(i)～(iii)より，点$(a,\ b)$の軌跡は右図の実線部になる。

ただし，原点と 2 点$(\pm4,\ 8)$は含まない。



［解　説］

絶対値付き関数のグラフと直線の位置関係に関する問題です。まず図を書き，それをもとに計算をしています。

7　　　　　［一橋大］

正の実数 $a,\ b,\ c$ は $a+b+c=1$ を満たす。連立不等式 $|ax+by|\leqq 1$, $|cx-by|\leqq 1$ の表す xy 平面の領域を D とする。D の面積の最小値を求めよ。

7 ［一橋大］

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c=1$に対し，$|ax+by|\leqq 1$ ……①より，

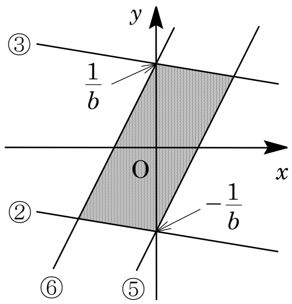
$$-1\leqq ax+by\leqq 1,\ -\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq -\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$ ……②，$y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}$ ……③

また，$|cx-by|\leqq 1$ ……④より，

$$-1\leqq cx-by\leqq 1,\ \frac{c}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq \frac{c}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=\dfrac{c}{b}x-\dfrac{1}{b}$ ……⑤，$y=\dfrac{c}{b}x+\dfrac{1}{b}$ ……⑥



①かつ④の表す領域 D は，直線②と③，および直線⑤と⑥が，平行で，しかも原点対称であることより，右上図の平行四辺形の内部または辺上となる。

そして，直線③と⑤を連立すると，$-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}=\dfrac{c}{b}x-\dfrac{1}{b}$ より，

$$(a+c)x=2,\ x=\frac{2}{a+c}$$

よって，領域 D の面積を S とおくと，対称性より，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{2}{a+c}\right)=\frac{4}{b(a+c)}=\frac{4}{b(1-b)}=\frac{4}{-b^2+b}$$

ここで，$f(b)=-b^2+b$ とおくと，$f(b)=-\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より，$0<b<1$ において，

$$0<f(b)\leqq\frac{1}{4}\ \left(\text{等号は}\,b=\frac{1}{2}\,\text{のとき成立}\right)$$

したがって，S は $b=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 16 をとる。

［解 説］

領域についての問題です。ただ，平行四辺形の 1 つの対角線が y 軸上にあったり，また面積が 1 文字で表せたり，かなり解きやすい設定になっています。

$\boxed{8}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・文］

座標平面上に3点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(9,\ 0)$ がある。線分OB上に2点P, Qを $\angle\mathrm{PAQ}=90^\circ$ となるようにとる。ただし，点Qの x 座標は点Pの x 座標より大きいものとする。$\angle\mathrm{APQ}=\theta$ とし，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を S とする。

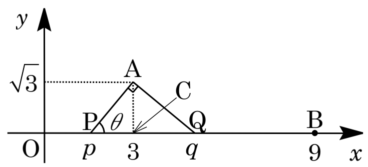
(1) S を θ を用いて表せ。

(2) S の最小値，およびそのときの点Pと点Qの x 座標を求めよ。

(3) S が $\triangle\mathrm{AOB}$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点Pと点Qの x 座標を求めよ。

8　　［千葉大・文］

(1)　O$(0,\ 0)$，A$(3,\ \sqrt{3})$，B$(9,\ 0)$に対し，線分 OB 上に点 P$(p,\ 0)$，Q$(q,\ 0)$があり，$\angle\mathrm{PAQ}=90°$を満たしている。ただし，$0\leqq p<3<q\leqq 9$である。



$\angle\mathrm{APQ}=\theta$とすると，$\mathrm{AP}\sin\theta=\sqrt{3}$ ………①

$\mathrm{AQ}\sin(90°-\theta)=\sqrt{3}$，$\mathrm{AQ}\cos\theta=\sqrt{3}$ ………②

ここで，△APQ の面積をSとすると，①②から，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}=\frac{3}{\sin 2\theta}$$

(2)　まず，(1)から$S=\dfrac{3}{\sin 2\theta}\geqq 3$である。ここで，等号が成立するのは$\sin 2\theta=1$，すなわち$\theta$は鋭角から$\theta=45°$のときである。

このとき，△APQ は直角二等辺三角形となり，C$(3,\ 0)$とおくと$\mathrm{PC}=\mathrm{QC}=\sqrt{3}$から，P, Q はともに線分 OB 上にある。

よって，Sの最小値は 3 であり，このとき P のx座標は$3-\sqrt{3}$，Q のx座標は$3+\sqrt{3}$となる。

(3)　まず，$\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{3}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$となり，条件より$S=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{AOB}$から，

$$\frac{3}{\sin 2\theta}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3},\ \sin 2\theta=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$なので，③と合わせると，

$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\sqrt{3},\ \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=2\sqrt{3},\ \tan^2\theta-2\sqrt{3}\tan\theta+1=0$$

よって，$\tan\theta=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$ ……④となる。

さて，$\mathrm{PC}=\sqrt{3}\tan(90°-\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\theta}$，$\mathrm{QC}=\sqrt{3}\tan\theta$で，条件から，$0<\mathrm{PC}\leqq 3$，$0<\mathrm{QC}\leqq 6$であるので，

$$0<\frac{\sqrt{3}}{\tan\theta}\leqq 3\ \cdots\cdots\cdots⑤,\ \ 0<\sqrt{3}\tan\theta\leqq 6\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より$\tan\theta\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，⑥より$0<\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$となり$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$

すると，④から$\tan\theta=\sqrt{3}+\sqrt{2}$となり，このとき，

$$\mathrm{PC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=3-\sqrt{6},\ \ \mathrm{QC}=\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3+\sqrt{6}$$

よって，P のx座標$3-(3-\sqrt{6})=\sqrt{6}$，Q のx座標$3+(3+\sqrt{6})=6+\sqrt{6}$である。

［解　説］

三角関数の図形への応用問題で，いろいろな解法が考えられます。

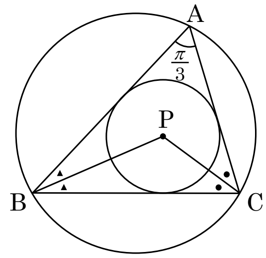
9　　［京都大・理］

$\triangle$ABC は鋭角三角形であり，$\angle \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また$\triangle$ABC の外接円の半径は 1 であるとする。

(1)　$\triangle$ABC の内心を P とするとき，$\angle$BPC を求めよ。

(2)　$\triangle$ABC の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。

9　　［京都大・理］

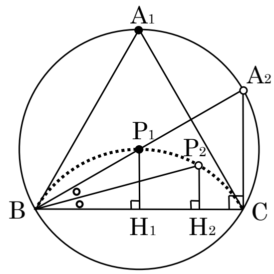


(1)　△ABC の内心を P とするとき,

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BPC} &= \pi - (\angle\mathrm{PBC} + \angle\mathrm{PCB})\\ &= \pi - \frac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{ACB}) = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \angle\mathrm{A})\\ &= \pi - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

(2)　△ABC の外接円の半径は 1 から, 正弦定理より,

$$\mathrm{BC} = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

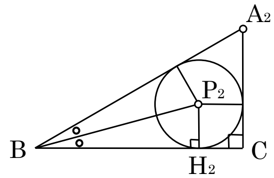


さて, △ABC は$\angle\mathrm{A} = \dfrac{\pi}{3}$である鋭角三角形である。ここで, $\triangle\mathrm{A_1BC}$を正三角形, $\triangle\mathrm{A_2BC}$を$\angle\mathrm{C} = \dfrac{\pi}{2}$の直角三角形としたとき, 対称性から一般性を失うことなく, 点 A は右図の弧$\mathrm{A_1A_2}$上を動くとしてもよい。ただし, 点$\mathrm{A_1}$は含み, 点$\mathrm{A_2}$は含まない。

また, 点 P は$\angle\mathrm{BPC} = \dfrac{2}{3}\pi$から BC を弦とする点線の円弧上を動く。そして, $\mathrm{A} = \mathrm{A_1}$のとき$\mathrm{P} = \mathrm{P_1}$, $\mathrm{A} = \mathrm{A_2}$のとき$\mathrm{P} = \mathrm{P_2}$とする。さらに, $\mathrm{P_1}$から BC に垂線$\mathrm{P_1H_1}$, $\mathrm{P_2}$から BC に垂線$\mathrm{P_2H_2}$を引く。

すると, △ABC の内接円の半径 r のとりうる値は, $\mathrm{P_2H_2} < r \leqq \mathrm{P_1H_1}$である。

そこで, $\angle\mathrm{P_1BH_1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$から, $\mathrm{P_1H_1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$



また, $\triangle\mathrm{A_2BC}$は, $\mathrm{AB} = 2$, $\mathrm{AC} = 1$, $\mathrm{BC} = \sqrt{3}$なので, 右図から,

$$(\sqrt{3} - \mathrm{P_2H_2}) + (1 - \mathrm{P_2H_2}) = 2,\ \mathrm{P_2H_2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

以上より, $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} < r \leqq \dfrac{1}{2}$である。

［解　説］

平面図形の計量についての基本的な問題です。(1)の誘導により, 内心の軌跡が導けます。

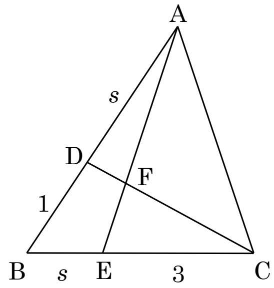
10　　［東北大］

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2)　F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

$\boxed{10}$　　［東北大］



(1)　△ABE と直線 CD にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1,\ \ \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}$$

条件より，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=s:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=s:3$ なので,

$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}=\frac{s(s+3)}{3}$$

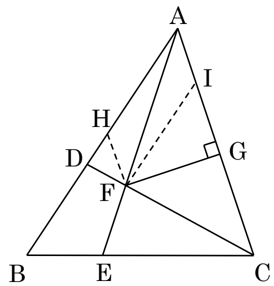
すると，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}=\frac{s}{s^2+3s+3}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

ここで，条件より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので,

$$\alpha=\frac{3s}{s^2+3s+3},\ \ \beta=\frac{s^2}{s^2+3s+3}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ から,



$$\triangle\mathrm{AFC}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，F から辺 AC に垂線 FG を下ろすと,

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}$，$\mathrm{FG}=\dfrac{2\alpha}{\mathrm{AC}}\triangle\mathrm{ABC}$

これより，FG の長さが最大となるのは α が最大となるときで，(1)の結果を $\alpha=\dfrac{3}{s+3+\frac{3}{s}}$ と変形すると，相加平均と相乗平均の関係より,

$$s+\frac{3}{s}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}=2\sqrt{3}$$

ただし，等号は $s=\dfrac{3}{s}$ すなわち $s=\sqrt{3}$ のとき成立し，これより,

$$\alpha=\frac{3}{s+3+\frac{3}{s}}\leqq\frac{3}{2\sqrt{3}+3}=2\sqrt{3}-3$$

よって，FG の長さが最大となるときの s の値は $s=\sqrt{3}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用問題で，頻出の構図です。解答例では図形的に処理をしましたが, (1)では分点ベクトル, (2)では内積を用いても，記述量はやや増加する程度です。

$\boxed{11}$ ［千葉大］

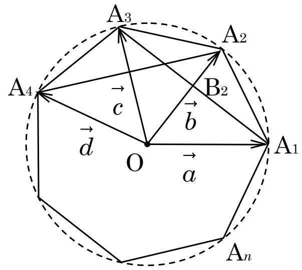
n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。

11 ［千葉大］



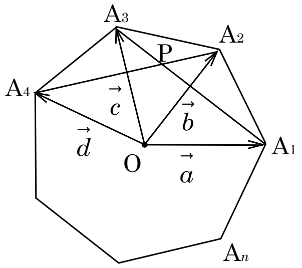
(1) 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対し，直線 OA_2 は線分 A_1A_3 の垂直二等分線であり，OA_2 と A_1A_3 との交点を B_2 とおくと，

$$OB_2=\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$$

すると，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{k}{2}\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ である。

同様に，直線 OA_3 は線分 A_2A_4 の垂直二等分線なので，$\vec{d}=k\vec{c}-\vec{b}$ である。

なお，$n=4$ のときは $k=0$ であるが，このときも成立している。



(2) まず，P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するので，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}=(1-t)(k\vec{b}-\vec{c})+t\vec{c}$$
$$=(1-t)k\vec{b}+(2t-1)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，対称性より，P は線分 A_4A_2 を $t:1-t$ に内分するので，同様にすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{d}+t\vec{b}=(1-t)(k\vec{c}-\vec{b})+t\vec{b}$$
$$=(2t-1)\vec{b}+(1-t)k\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので，$(1-t)k=2t-1$ となり，

$$(k+2)t=k+1\,,\ t=\frac{k+1}{k+2}$$

ここで，$n\geqq 4$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，これより $0\leqq k<2$ なので，

$$t-\frac{1}{2}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2(k+2)}\geqq 0\,,\ t-\frac{3}{4}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{3}{4}=\frac{k-2}{4(k+2)}<0$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ である。

(3) 条件から，$A_1P:PA_3=t:1-t$ より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{1-t}{t}\triangle PA_1A_2\cdots\cdots\cdots③$

また，$A_2P:PA_4=1-t:t$ より，$\triangle PA_1A_2=(1-t)\triangle A_1A_2A_4\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{(1-t)^2}{t}\triangle A_1A_2A_4$ となり，(2)から，

$$\frac{(1-t)^2}{t}-\frac{1}{12}=\frac{12t^2-25t+12}{12t}=\frac{(3t-4)(4t-3)}{12t}>0$$

よって，$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}=\dfrac{(1-t)^2}{t}>\dfrac{1}{12}$ である。

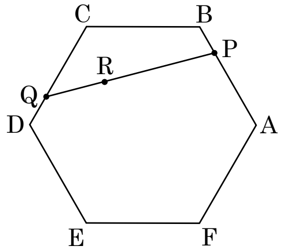
［解 説］

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

$\boxed{12}$ ［東京大・文］

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

$\boxed{12}$ ［東京大・文］



1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の辺 AB 上を点 P, 辺 CD 上を点 Q が独立に動くとき，$0 \leqq p \leqq 1$，$0 \leqq q \leqq 1$ として，$\mathrm{AP : PB} = p : 1-p$，$\mathrm{DQ : QC} = q : 1-q$ とおく。

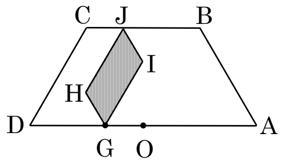
さて, AD の中点を O とし，$\mathrm{PR : RQ} = 2:1$ から,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + p\overrightarrow{\mathrm{AB}}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OD}} + q\overrightarrow{\mathrm{DC}})\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}}\end{aligned}$$

ここで, AD を $2:1$ に内分する点を G とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + \frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{GR}} = \frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

そこで，$0 \leqq \frac{1}{3}p \leqq \frac{1}{3}$，$0 \leqq \frac{2}{3}q \leqq \frac{2}{3}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GI}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおくと，点 R は右図の平行四辺形 GIJH の内部または辺上を動く。



$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}| = \frac{1}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{GI}}| = \frac{2}{3}$，$\angle\mathrm{HGI} = \frac{\pi}{3}$ より，その面積は,

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

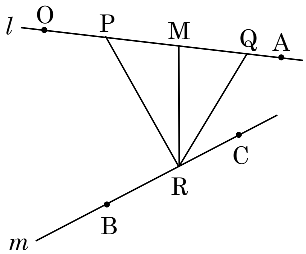
［解 説］

平面ベクトルと領域の問題です。成分表示を利用するかどうかで, 2 つの解法があります。この問題ではどちらでも可能ですが, 前者は後者に比べ, 記述量がかなり増えます。

13 ［京都大・文］

座標空間において原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を l とし，点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする。l 上の 2 点 P，Q と，m 上の点 R を△PQR が正三角形となるようにとる。このとき，△PQR の面積が最小となるような P，Q，R の座標を求めよ。

13　　　　［京都大・文］



原点 O と点 A(0, -1, 1) を通る直線 l 上に 2 点 P, Q, 点 B(0, 2, 1) と点 C(-2, 2, -3) を通る直線 m 上に点 R がある。ここで，線分 PQ の中点を M とするとき，△PQR が正三角形より，その面積は，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{MR}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{MR}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{MR}^2$$

すると，△PQR の面積が最小となるのは，MR が最小の場合である。すなわち，$\mathrm{MR}\perp l$ かつ $\mathrm{MR}\perp m$ である。

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,\ -4)=-2(1,\ 0,\ 2)$ なので，t, s を実数とすると，直線 l, m は，

$$l:(x,\ y,\ z)=t(0,\ -1,\ 1),\ m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)+s(1,\ 0,\ 2)$$

これより，$\mathrm{M}(0,\ -t,\ t)$，$\mathrm{R}(s,\ 2,\ 1+2s)$ とおけ，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=(s,\ 2+t,\ 1+2s-t)$

さて，$\mathrm{MR}\perp l$ から $\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ となり，

$$-2-t+1+2s-t=0,\ -2t+2s=1\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{MR}\perp m$ から $\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり，

$$s+2(1+2s-t)=0,\ -2t+5s=-2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=-1$，$t=-\frac{3}{2}$ となり，$\mathrm{M}\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$，$\mathrm{R}(-1,\ 2,\ -1)$ である。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ から，$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

すると，$\mathrm{PQ}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ から，点 P, Q の座標は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 1)$$
$$=\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)\pm\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

よって，$\mathrm{P}(0,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2,\ -2)$，または $\mathrm{P}(0,\ 2,\ -2)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ -1)$ である。

［解　説］

高校数学に「代数・幾何」という科目があったころの頻出題の 1 つです。ポイントは，正三角形の中線がねじれの位置にある l と m の共通垂線ということです。なお，最後の点 P, Q の座標を求める計算は，単位ベクトルを利用しています。

14　　［東京医歯大］

xyz 空間において，点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を σ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　球面 σ の方程式を求めよ。

(2)　xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して，線分 AP と球面 σ との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を示せ。

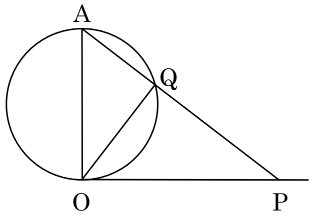
(3)　点 $\mathrm{S}(p,\ q,\ r)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}} = -\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$ を満たす，xy 平面上にない定点とする。σ 上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ を満たしながら動くとき，直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか。$p,\ q,\ r$ を用いて答えよ。

14　　［東京医歯大］

(1)　$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$に対し，線分 OA が直径の球面σは，中心$\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，

半径$\dfrac{1}{2}$より，その方程式は，

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$



(2)　xy 平面上の点 $\mathrm{P}(\mathrm{P}\neq\mathrm{O})$ に対して, 3 点 O, A, P を含む平面を考えると，この平面による球面σの切り口は OA が直径の円となるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ である。

(3)　$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$とおき，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QP}=t:1-t\ (0<t<1)$とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(x,\ y,\ 0)$$
$$=(tx,\ ty,\ 1-t)\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ -1)$ から，

$$tx^2+ty^2-(1-t)=0,\ t=\frac{1}{x^2+y^2+1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\mathrm{S}(p,\ q,\ r)\ (r\neq0)$から$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=(p,\ q,\ r-1)$となり，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$より，

$$p^2+q^2+r(r-1)=-(p^2+q^2+r^2),\ 2(p^2+q^2+r^2)=r\ \cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ なので，①から$\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=(tx-p,\ ty-q,\ 1-t-r)$となり，

$$p(tx-p)+q(ty-q)+r(1-t-r)=0$$
$$ptx+qty+r(1-t)=p^2+q^2+r^2\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$2ptx+2qty+2r(1-t)=r$，$2ptx+2qty-2tr+r=0$

②を代入すると，$\dfrac{2px}{x^2+y^2+1}+\dfrac{2qy}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2r}{x^2+y^2+1}+r=0$ となり，

$$2px+2qy-2r+r(x^2+y^2+1)=0,\ x^2+y^2-1+\frac{2p}{r}x+\frac{2q}{r}y=0$$

$$\left(x+\frac{p}{r}\right)^2+\left(y+\frac{q}{r}\right)^2=\frac{p^2+q^2+r^2}{r^2}$$

ここで，③から$r>0$となり，$\left(x+\dfrac{p}{r}\right)^2+\left(y+\dfrac{q}{r}\right)^2=\dfrac{1}{2r}$

したがって，点 P は xy 平面上で，中心$\left(-\dfrac{p}{r},\ -\dfrac{q}{r},\ 0\right)$，半径$\dfrac{1}{\sqrt{2r}}$の円を描く。

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。上の解答例は，成分計算を主体として記述しています。

$\boxed{15}$ ［一橋大］

連立方程式 $x^2=yz+7$，$y^2=zx+7$，$z^2=xy+7$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x\leqq y\leqq z$ となるものを求めよ。

$\boxed{15}$ ［一橋大］

連立方程式 $x^2=yz+7$ ……①，$y^2=zx+7$ ……②，$z^2=xy+7$ ……③に対して，

①－②より，$x^2-y^2=z(y-x)$，$(x-y)(x+y+z)=0$ ………④

②－③より，$y^2-z^2=x(z-y)$，$(y-z)(x+y+z)=0$ ………⑤

(i)　$x+y+z\neq 0$ のとき

④⑤より $x=y=z$ となり，①に代入すると $x^2=x^2+7$ となり，成立しない。

(ii)　$x+y+z=0$ のとき

④⑤は満たされ，$y=-(x+z)$ として①に代入すると，$x^2=-(x+z)z+7$ となり，

$$x^2+zx+z^2-7=0 \text{ ………⑥}$$

ここで，x は実数より，$D=z^2-4(z^2-7)\geqq 0$ となり，

$$3z^2-28\geqq 0,\ \ z^2\leqq\frac{28}{3} \text{ ………⑦}$$

さて，整数 x, y, z は，$x+y+z=0$ かつ $x\leqq y\leqq z$ より，$x\leqq 0$，$0\leqq z$ ………⑧

⑦⑧より，$z=0,\ 1,\ 2,\ 3$ となる。

(ii-i)　$z=0$ のとき　⑥より $x^2=7$ となり，x が整数というのに反する。

(ii-ii)　$z=1$ のとき　⑥より $x^2+x-6=0$ となり，$(x+3)(x-2)=0$

⑧から $x=-3$，$y=-(-3+1)=2$ となるが，$x\leqq y\leqq z$ に反する。

(ii-iii)　$z=2$ のとき　⑥より $x^2+2x-3=0$ となり，$(x+3)(x-1)=0$

⑧から $x=-3$，$y=-(-3+2)=1$ となり，$x\leqq y\leqq z$ を満たす。

(ii-iv)　$z=3$ のとき　⑥より $x^2+3x+2=0$ となり，$(x+2)(x+1)=0$

⑧から $x=-2,\ -1$ となる。

$x=-2$ のとき，$y=-(-2+3)=-1$ となり，$x\leqq y\leqq z$ を満たす。

$x=-1$ のとき，$y=-(-1+3)=-2$ となり，$x\leqq y\leqq z$ に反する。

(i)(ii)より，$(x,\ y,\ z)=(-3,\ 1,\ 2)$，$(-2,\ -1,\ 3)$

［解 説］

連立方程式をまとめる問題です。上の解答例では，⑧の条件に着目して，まず y を消去し，0 以上である z の値から求めています。

$\boxed{16}$ ［北海道大・理］

自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

16 ［北海道大・理］

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ ……①のとき，

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=2kn+k^2-n=k^2+(2k-1)n$$

ここで，$n\geqq 1$，$2k-1\geqq 1$ より，$(2k-1)n\geqq 2k-1$ となり，

$$a\geqq k^2+2k-1 \text{ ………②}$$

(2) n が自然数で $n(n+1)+14$ が平方数のとき，$n(n+1)+14>n^2$ より，①から，

$$n(n+1)+14=(n+k)^2 \text{（k は自然数）………③}$$

すると，②から，$14\geqq k^2+2k-1$ となり，$k^2+2k-15\leqq 0$

$$(k+5)(k-3)\leqq 0,\ -5\leqq k\leqq 3$$

k は自然数から，$k=1,\ 2,\ 3$ となる。

(i) $k=1$ のとき ③から，$n(n+1)+14=(n+1)^2$ となり，$n=13$

(ii) $k=2$ のとき ③から，$n(n+1)+14=(n+2)^2$ となり，$n=\dfrac{10}{3}$ より不適

(iii) $k=3$ のとき ③から，$n(n+1)+14=(n+3)^2$ となり，$n=1$

(i)～(iii)より，$n=1,\ 13$ である。

［解 説］

整数問題ですが，(1)の誘導が強力なため，基本的な内容になっています。

$\boxed{17}$ ［九州大・文］

以下の問いに答えよ。

(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。

17 ［九州大・文］

(1) 自然数 a と b の最大公約数を $G(a,\ b)$ と表すと，ユークリッドの互除法より，

$$G(2017,\ 225)=G(225,\ 217)=G(217,\ 8)$$
$$=G(8,\ 1)=1$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 8\overline{)\,217} \\ 16 \\ \hline 57 \\ 56 \\ \hline 1 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1 \\ 217\overline{)\,225} \\ 217 \\ \hline 8 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 8 \\ 225\overline{)\,2017} \\ 1800 \\ \hline 217 \end{array}$$

(2) $15=3\times5$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

15×1，15×2，15×3，$\cdots$，15×134

すると，$225=3^2\times5^2$ から，225 との最大公約数が 15 である自然数の個数は，134 以下の自然数で 3 の倍数でも 5 の倍数でもないものの個数となる。

ここで，134 以下の自然数で 3 の倍数となるものが 44 個，5 の倍数となるものが 26 個，15 の倍数となるものが 8 個である。

よって，求める自然数の個数は，$134-(44+26-8)=72$ である。

(3) $111=3\times37$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

111×1，111×2，111×3，$\cdots$，111×18

すると，$1998=111\times2\times3^2$ から，1998 との最大公約数が 111 の自然数は，18 以下の自然数で 2 の倍数でも 3 の倍数でもない数と 111 との積になり，

111×1，111×5，111×7，111×11，111×13，111×17

さらに，225 との最大公約数が 15 から，求める自然数は $111\times5=555$ である。

［解 説］

約数と倍数の問題です。(1)は年度の数が題材になっているため，2017 が素数という知識をもっていたとしても不思議ではありません。ただ，これをストレートに利用して，いきなり結論とするのは避けた方がよいでしょう。「ふるい」にかけて示せば別ですが。

18 ［筑波大・理］

数列$\{a_n\}$が，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を満たすとする。また，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $b_n\geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を示せ。

(2) b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) a_{2017}の一の位の数を求めよ。

18　　［筑波大・理］

(1)　$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}$ に対して，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)^2$$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_1=2\geqq 0$，$b_{n+1}=3{b_n}^2$ ………①

よって，帰納的に，$b_n\geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ である。

(2)　以下，b_n の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$b_1=2$ より成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　b_k の一の位の数が 2 であると仮定する。

これより，l_k を 0 以上の整数として，$b_k=10l_k+2$ とおくと，①から，

$$b_{k+1}=3{b_k}^2=3(10l_k+2)^2=300{l_k}^2+120l_k+12=10(30{l_k}^2+12l_k+1)+2$$

よって，b_{k+1} の一の位の数は 2 である。

(i)(ii)より，b_n の一の位の数は 2 である。

(3)　(2)より，l_n を 0 以上の整数として，$b_n=10l_n+2$ とおくことができ，

$$a_{n+1}-a_n=10l_n+2\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$n\geqq 2$ において，②から，$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(10l_k+2)$ となり，

$$a_{2017}=1+10\sum_{k=1}^{2016}l_k+2\cdot 2016=10\sum_{k=1}^{2016}l_k+4033=10\Big(\sum_{k=1}^{2016}l_k+403\Big)+3$$

したがって，a_{2017} の一の位の数は 3 である。

［解　説］

整数と漸化式の融合問題です。(1)は簡単に記しましたが，丁寧に書くなら数学的帰納法です。また，(2)(3)は合同式を用いると，少し簡略になります。

19 ［東京大］

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。

以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$p=2+\sqrt{5}$，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ に対し，$q=-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$ とおくと，

$$a_n=p^n+q^n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$$

これより，$a_1=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$，$a_2=(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^2=18$ となる。

(2)　$n\geqq 2$ で，$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})$

すると，$pq=-1$ より，$a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

(3)　(2)より，$4a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ となり，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………①

ここで，a_n は自然数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　(1)より a_n は自然数である。

(ii)　$n=k-1,\ k\ (k\geqq 2)$ のとき　a_{k-1}，a_k がともに自然数であると仮定する。

①より，$a_{k+1}=4a_k+a_{k-1}$ となるので，a_{k+1} も自然数である。

(i)(ii)より，a_n は自然数である。

(4)　まず, (1)より，a_2 と a_1 の最大公約数は 2 である。

そして，a_1 と a_2 がともに偶数のとき，①から，帰納的に，すべての a_n は偶数であることがわかる。

そこで，$a_n=2b_n$ とおくと，すべての b_n は自然数となり，$2b_1=4$，$2b_2=18$，$2b_{n+1}=4\cdot 2b_n+2b_{n-1}$ から，

$$b_1=2,\ b_2=9,\ b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，b_{n+1} と b_n が互いに素でないと仮定すると，2 以上の自然数 g を用いて，

$$b_{n+1}=gb_{n+1}',\ b_n=gb_n'\ \ (b_{n+1}',\ b_n' \text{は自然数})$$

②より，$b_{n-1}=b_{n+1}-4b_n=g(b_{n+1}'-4b_n')$ となり，b_{n-1} も約数 g をもつ。

同様に繰り返すと，b_2 と b_1 はともに 2 以上の約数 g をもつことになるが，$b_1=2$，$b_2=9$ より不適である。よって，b_{n+1} と b_n は互いに素である。

以上より，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。

［解　説］

a_n の式から隣接 3 項間型漸化式を導き，この式と最大公約数を絡めた頻出問題です。たとえば, 昨年は神戸大・理で類題が出ています。

20 ［九州大・理］

初項$a_1=1$，公差 4 の等差数列$\{a_n\}$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

20　　［九州大・理］

(1) 初項 1, 公差 4 の等差数列$\{a_n\}$の一般項は, $a_n=1+4(n-1)=4n-3$

さて, a_nが 7 の倍数となるのは, kを自然数として, $4n-3=7k$ ………①

ここで, $4\times(-1)-3=7\times(-1)$から, ①を変形すると,

$$4(n+1)=7(k+1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると, 4 と 7 は互いに素より, lを整数として$n+1=7l$, $k+1=4l$となり,

$$n=7l-1,\ k=4l-1$$

そこで, $1\leqq n\leqq 600$, $k\geqq 1$から, $1\leqq 7l-1\leqq 600$, $4l-1\geqq 1$となり,

$$\frac{1}{2}\leqq l\leqq\frac{601}{7}=85+\frac{6}{7}$$

これより, $l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85$となり, 7 の倍数である項の個数は 85 である。

(2) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち, 7 の倍数の項を取り出してb_lとおくと,

$$b_l=a_{7l-1}=4(7l-1)-3=28l-7=7(4l-1)\quad(l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85)$$

さて, a_nが7^2の倍数, すなわちb_lが 7 の倍数となるのは, mを自然数として,

$$4l-1=7m\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで, $4\times2-1=7\times1$から, ③を変形すると,

$$4(l-2)=7(m-1)$$

すると, 4 と 7 は互いに素より, pを整数として$l-2=7p$, $m-1=4p$となり,

$$l=7p+2,\ m=4p+1$$

そこで, $1\leqq l\leqq 85$, $m\geqq 1$から, $1\leqq 7p+2\leqq 85$, $4p+1\geqq 1$となり,

$$0\leqq p\leqq\frac{83}{7}=11+\frac{6}{7}$$

これより, $p=0,\ 1,\ \cdots,\ 11$となり, 7^2の倍数である項の個数は 12 である。

(3) a_nが 7 の倍数のとき, $n=7l-1\ (l\geqq 1)$となり, このnを書き並べると,

$$6,\ \underline{13},\ 20,\ 27,\ 34,\ 41,\ 48\ |\ 55,\ \underline{62},\ 69,\ 76,\ 83,\ 90,\ 97\ |\ 104,\ \underline{111},\ 118,\ \cdots\cdots$$

そして, この数列を 7 個ずつの区画に分け, 左から第 1 群, 第 2 群, …と呼ぶ。

また, a_nが7^2の倍数の項を取り出してc_pとおくと, $l=7p+2$から,

$$n=7(7p+2)-1=49p+13\quad(p\geqq 0)$$

すると, 上記の数列の下線をつけた数が対応して,

$$c_p=a_{49p+13}=4(49p+13)-3=196p+49=7^2(4p+1)\quad(p\geqq 0)$$

さらに, a_nが7^3の倍数, すなわちc_pが 7 の倍数になるのは, 同様にすると, qを 0 以上の整数として,

$$4p+1=7q\ \cdots\cdots\cdots④$$

そして, ④を満たす最小の p, q の値は$(p,\ q)=(5,\ 3)$であり, このときの n は, $n=49\cdot5+13=258$となり, $a_{258}=4\cdot258-3=1029=7^3\cdot3$である。

この$n=258$は，$7l-1=258$から$l=37$となり，上記の数列の第 6 群に属することがわかる。

さて，積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数 n については，素因数 7 の個数に注目し，これが合計 45 個以上となる最小の n を考えればよい。

まず，第 5 群まではa_nに7^3の倍数がないので，1 つの群内に素因数 7 が$7+1=8$個ずつとなり，その総数は$8\times5=40$個である。

すると，素因数 7 の残り 5 個について調べるために，第 6 群を書き並べると，

$$|\ 251,\ \underline{258},\ 265,\ 272,\ \cdots\cdots$$

これより，a_{251}は 7 の倍数，a_{258}は7^3の倍数，a_{265}は 7 の倍数，…となるので，積$a_{251}a_{258}a_{265}$に素因数 7 が 5 個あることがわかる。

以上より，積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数nは，$n=265$である。

［解 説］

整数と数列の融合問題です。解答例では，頻出の(1)の結果を利用して，(2)につなげています。なお，(3)は群数列の考え方をもとにしていますが，45 という数値が意味深長で，詰めがかなり面倒でした。

21　　［名古屋大・文］

次の問いに答えよ。

(1)　次の条件(＊)を満たす３つの自然数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ。

(＊)　$a<b<c$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　偶数$2n$ $(n \geqq 1)$ の３つの正の約数$p,\ q,\ r$で，$p>q>r$と$p+q+r=n$を満たす組$(p,\ q,\ r)$の個数を$f(n)$とする。ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$とする。nが自然数全体を動くときの$f(n)$の最大値Mを求めよ。また，$f(n)=M$となる自然数nの中で最小のものを求めよ。

21　［名古屋大・文］

(1)　条件(＊)から，自然数a，b，cに対し，$a<b<c$かつ$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$………①

すると，$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}>0$となるので，①から$\dfrac{3}{a}>\dfrac{1}{2}$，すなわち$a<6$………②

また，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>0$なので，①から$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{2}$，すなわち$a>2$………③

②③より$2<a<6$となり，$a=3,\ 4,\ 5$である。

(i)　$a=3$のとき　①より$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}$となり，

$bc-6b-6c=0$，$(b-6)(c-6)=36$

ここで，$3<b<c$から$-3<b-6<c-6$となり，

$(b-6,\ c-6)=(1,\ 36)$，$(2,\ 18)$，$(3,\ 12)$，$(4,\ 9)$

よって，$(b,\ c)=(7,\ 42)$，$(8,\ 24)$，$(9,\ 18)$，$(10,\ 15)$

(ii)　$a=4$のとき　①より$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}$となり，

$bc-4b-4c=0$，$(b-4)(c-4)=16$

ここで，$4<b<c$から$0<b-4<c-4$となり，

$(b-4,\ c-4)=(1,\ 16)$，$(2,\ 8)$

よって，$(b,\ c)=(5,\ 20)$，$(6,\ 12)$

(iii)　$a=5$のとき　①より$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{10}$となり，

$3bc-10b-10c=0$，$9bc-30b-30c=0$，$(3b-10)(3c-10)=100$

$5<b<c$から$5<3b-10<3c-10$となり，適する$(3b-10,\ 3c-10)$はない。

(i)～(iii)より，自然数の組$(a,\ b,\ c)$は，

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 42)$，$(3,\ 8,\ 24)$，$(3,\ 9,\ 18)$，$(3,\ 10,\ 15)$，
$(4,\ 5,\ 20)$，$(4,\ 6,\ 12)$

(2)　$2n$の正の約数p，q，rに対し，$p>q>r$かつ$p+q+r=n$……④を満たす$(p,\ q,\ r)$の個数を$f(n)$とすると，④から，

$\dfrac{p}{2n}+\dfrac{q}{2n}+\dfrac{r}{2n}=\dfrac{1}{2}$………⑤

ここで，$\dfrac{2n}{p}=a$，$\dfrac{2n}{q}=b$，$\dfrac{2n}{r}=c$とおくと，a，b，cは自然数となり，さらに，$p>q>r$から，$\dfrac{2n}{p}<\dfrac{2n}{q}<\dfrac{2n}{r}$すなわち$a<b<c$である。

さらに，⑤をa，b，cで表すと，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$である。

すなわち，自然数の組$(p,\ q,\ r)$は，条件(＊)を満たす自然数の組$(a,\ b,\ c)$に対応し，その個数$f(n)$の最大値Mは，(1)の結果から$M\leqq 6$である。

以下，この 6 つの場合について，n の条件を求める。

(i) $(a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 42)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=7$，$\dfrac{2n}{r}=42$ より，

$$3p=2n\,,\ 7q=2n\,,\ 21r=n$$

よって，このとき n は 21 の倍数である。

(ii) $(a,\ b,\ c)=(3,\ 8,\ 24)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=8$，$\dfrac{2n}{r}=24$ より，

$$3p=2n\,,\ 4q=n\,,\ 12r=n$$

よって，このとき n は 12 の倍数である。

(iii) $(a,\ b,\ c)=(3,\ 9,\ 18)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=9$，$\dfrac{2n}{r}=18$ より，

$$3p=2n\,,\ 9q=2n\,,\ 9r=n$$

よって，このとき n は 9 の倍数である。

(iv) $(a,\ b,\ c)=(3,\ 10,\ 15)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=10$，$\dfrac{2n}{r}=15$ より，

$$3p=2n\,,\ 5q=n\,,\ 15r=2n$$

よって，このとき n は 15 の倍数である。

(v) $(a,\ b,\ c)=(4,\ 5,\ 20)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=4$，$\dfrac{2n}{q}=5$，$\dfrac{2n}{r}=20$ より，

$$2p=n\,,\ 5q=2n\,,\ 10r=n$$

よって，このとき n は 10 の倍数である。

(vi) $(a,\ b,\ c)=(4,\ 6,\ 12)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=4$，$\dfrac{2n}{q}=6$，$\dfrac{2n}{r}=12$ より，

$$2p=n\,,\ 3q=n\,,\ 6r=n$$

よって，このとき n は 6 の倍数である。

(i)～(vi)より，自然数 n が上記の条件をすべて満たすとき $M=6$ となる。

ここで，$21=3\times7$，$12=2^2\times3$，$9=3^2$，$15=3\times5$，$10=2\times5$，$6=2\times3$ から，n が $2^2\times3^2\times5\times7=1260$ の倍数のとき，条件をすべて満たす。

以上より，$M=6$ で，$f(n)=6$ となる最小の n は $n=1260$ である。

［解 説］

質，量ともにかなりハードな整数問題です。ただ，(1)が(2)への秀逸な誘導となっており，入試までに演習したい 1 題です。なお，(1)は，場合分けしたあと分母を払って因数分解をしていますが，不等式を用いて評価しても構いません。

22 ［京都大・文］

n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1) $X=1$ である確率を求めよ。

(2) $X=5$ である確率を求めよ。

$\boxed{22}$　　　　［京都大・文］

(1)　さいころを n 回振り，出た目の最大値を M，最小値を L としたとき，$M-L=1$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(5,\ 6)$ の場合である。

まず，$(L,\ M)=(1,\ 2)$ のときは，出た目がすべて 1 または 2 のいずれかという事象から，1 だけおよび 2 だけという事象を除いたものより，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

また，他の場合も同様なので，$M-L=1$ である確率は，

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=5\left(\frac{1}{3}\right)^n-10\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2)　$M-L=5$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 6)$ の場合だけである。

そこで，出た目がすべて 1 以上 5 以下の事象を A，2 以上 6 以下の事象を B とすると，$M-L=5$ である確率は，

$$1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

［解　説］

余事象の考え方がポイントである確率の有名問題です。頭を整理するには，図を書くと効果的です。

$\boxed{23}$ ［東京大・理］

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a) 最初に，点 P は原点 O にある。

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。

$\boxed{23}$ ［東京大・理］

(1) 点 P が $(m,\ n)$ にあるとき，1 秒後に $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ に移る事象を，それぞれ $A,\ B,\ C,\ D$ とする。そして，6 秒後に O から直線 $y=x$ 上に移り，A, B, C, D がそれぞれ a 回，b 回，c 回，d 回起こったとすると，

$$a+b+c+d=6 \cdots\cdots\cdots①,\ \ b-d=a-c \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a+d=3$，$b+c=3$

つまり，A または D が 3 回，B または C が 3 回起こったことより，その確率は，

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3=20\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

(2) (1)と同様に設定して，6 秒後に O から O に移る条件は，

$$a+b+c+d=6 \cdots\cdots\cdots③,\ \ a-c=0 \cdots\cdots\cdots④,\ \ b-d=0 \cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$a+b=3$，$c=a$，$d=b$

これより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は，

$$(0,\ 3,\ 0,\ 3),\ (1,\ 2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2,\ 1),\ (3,\ 0,\ 3,\ 0)$$

すると，求める確率は，

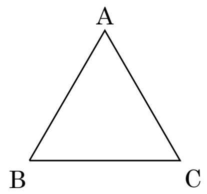
$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=400\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{25}{256}$$

［解　説］

ランダムウォークのついての標準的な問題です。なお，(1)でも(2)と同じように，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組を求めて，確率を計算しても構いません。

24 ［広島大・理］

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし, $0<p<1$ である。このとき, 右図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。



コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

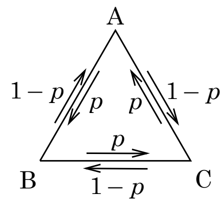
R は最初 A にあり, 全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで, N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) P_2, P_3 を求めよ。

(2) P_{2m}, P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。

24　　　　［広島大・理］



(1)　まず, R が 2 回目に A に初めて戻るのは，$A\to B\to A$ または $A\to C\to A$ から，その確率 P_2 は,

$$P_2=p(1-p)+(1-p)p=2p(1-p)$$

また, R が 3 回目に A に初めて戻るのは，$A\to B\to C\to A$ または $A\to C\to B\to A$ から，その確率 P_3 は,

$$P_3=p^3+(1-p)^3=1-3p+3p^2$$

(2)　R が $2m$ 回目に A に初めて戻るのは，A→B→C→B→C→B→…→C→B→A または A→C→B→C→B→C→…→B→C→A から，その確率 P_{2m} は,

$$P_{2m}=p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p)+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p=2p^m(1-p)^m$$

また, R が $2m+1$ 回目に A に初めて戻るのは，A→B→C→B→C→…→B→C→A または A→C→B→C→B→…→C→B→A から，その確率 P_{2m+1} は,

$$\begin{aligned}P_{2m+1}&=p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2\\&=p^3\{p(1-p)\}^{m-1}+(1-p)^3\{(1-p)p\}^{m-1}\\&=(1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1}\end{aligned}$$

(3)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき，(2)より，$P_{2m}=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^m=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$$P_{2m+1}=\left(1-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

さて, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻るのは,

(i)　R が A に初めて戻るのが $2m$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は，$P_{2m}P_{2N+3-2m}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

(ii)　R が A に初めて戻るのが $2m+1$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は，$P_{2m+1}P_{2N+3-(2m+1)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

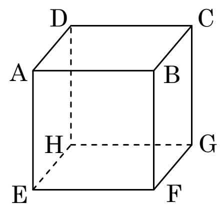
(i)(ii)より, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻る確率 Q は,

$$Q=\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}=2N\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}=\frac{N}{2^{2N}}$$

［解　説］

確率の計算問題です。ミスを防ぐような丁寧な誘導がついています。

$\boxed{25}$ ［名古屋大・文］



右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。

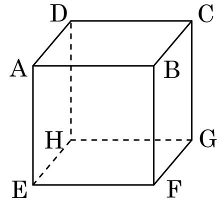
(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

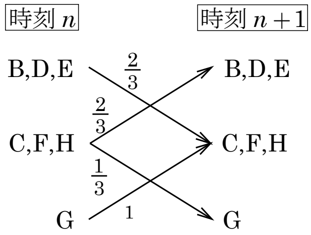
25 ［名古屋大・文］

(1) 時刻 0 で A にいた点 P が, 時刻 n において, A に戻らず B, D, E のいずれかにいる確率 p_n , A に戻らず C, F, H のいずれかにいる確率 q_n , A に戻らず G にいる確率 r_n について,



$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots③$$



ここで, $p_1=1$, $q_1=r_1=0$ なので, ①②③より,

$$p_2=\frac{2}{3}q_1=0,\ q_2=\frac{2}{3}p_1+r_1=\frac{2}{3},\ r_2=\frac{1}{3}q_1=0$$

$$p_3=\frac{2}{3}q_2=\frac{4}{9},\ q_3=\frac{2}{3}p_2+r_2=0,\ r_3=\frac{1}{3}q_2=\frac{2}{9}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき, ①より $p_n=\frac{2}{3}q_{n-1}$, ③より $r_n=\frac{1}{3}q_{n-1}$

②に代入すると, $q_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1}$, $q_{n+1}=\frac{7}{9}q_{n-1}\cdots\cdots\cdots④$

さて, ④に $n=2k$ を代入すると $q_{2k+1}=\frac{7}{9}q_{2k-1}$ となり, $q_{2k-1}=q_1\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=0$

$$p_{2k}=\frac{2}{3}q_{2k-1}=0,\ r_{2k}=\frac{1}{3}q_{2k-1}=0$$

④に $n=2k+1$ を代入すると $q_{2k+2}=\frac{7}{9}q_{2k}$ となり, $q_{2k}=q_2\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1}=\frac{2}{3}q_{2k}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1},\ r_{2k+1}=\frac{1}{3}q_{2k}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より, $q_n=0$ (n が奇数), $q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ (n が偶数)

また, $n=2k+1$ のとき, $k-1=\frac{n-3}{2}$ から,

$$p_n=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n \text{ が 3 以上の奇数}),\ p_n=0\ (n \text{ が偶数})$$

$$r_n=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n \text{ が 3 以上の奇数}),\ r_n=0\ (n \text{ が偶数})$$

(3) 時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m は, $m\geqq 2$ のとき,

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお, $m=1$ のときは, $s_1=\frac{1}{3}p_1=\frac{1}{3}$ である。

［解 説］

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが, 特別な形でしたので, n を偶奇に分けて記しています。