

7

[熊本大]

$s > 0$, $t > 0$ とする。複素数平面上の $\alpha = -i$, $\beta = 2 - 2i$, $\gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに, 点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり, $\triangle ACD$ が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) z を s, t を用いて表せ。
- (2) α, β, γ が等式 $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ を満たすとき, γ と z をそれぞれ求めよ。
- (3) (2)で求めた γ と z に対して, 直線 AC と直線 BD の交点を F とし, $\angle DFC = \theta$ とする。このとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。

8

[東北大]

α, β, γ を複素数とし, $\bar{z}z + \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \cdots \cdots (*)$ を満たす複素数 z を考える。

以下の問いに答えよ。

- (1) z は, $(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$ を満たすことを示せ。
- (2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ を仮定し, また γ は負の実数であると仮定する。このとき, $(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α, β を用いて表せ。

9

[京都大]

w を 0 でない複素数, x, y を $w + \frac{1}{w} = x + yi$ を満たす実数とする。

- (1) 実数 R は $R > 1$ を満たす定数とする。 w が絶対値 R の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。
- (2) 実数 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。 w が偏角 α の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。

10

[東京大]

複素数平面上の原点以外の点 z に対して、 $w = \frac{1}{z}$ とする。

- (1) α を 0 でない複素数とし、点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき、点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。
- (2) 1 の 3 乗根のうち、虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め、複素数平面上に図示せよ。

11

[北海道大]

複素数平面上に3点 O, A, B を頂点とする $\triangle OAB$ がある。ただし、 O は原点とする。 $\triangle OAB$ の外心を P とする。3点 A, B, P が表す複素数を、それぞれ α, β, z とするとき、 $\alpha\beta = z$ が成り立つとする。

- (1) 複素数 α の満たすべき条件を求め、点 $A(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。
- (2) 点 $P(z)$ の存在範囲を求め、複素数平面上に図示せよ。

12

[東京工大]

実数 a, b, c に対して $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$, $f(x) = x^2 + cx + 1$ とおく。
また, 複素数平面内の単位円周から 2 点 $1, -1$ を除いたものを T とする。

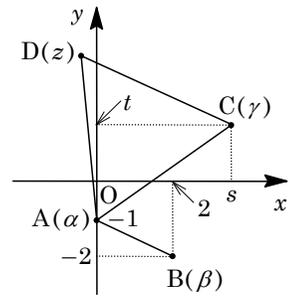
- (1) $f(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。
- (2) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるならば, $F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$ を満たす実数 c_1, c_2 が存在することを示せ。
- (3) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し, それを満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ。

7

[熊北大]

- (1) $\alpha = -i$, $\beta = 2 - 2i$, $\gamma = s + ti$ ($s > 0, t > 0$) に対し, 複素数平面上に $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ をとる.

ここで, $\triangle ACD$ が正三角形で, 点 D が直線 AC に関して B と反対側にあることより, $D(z)$ は $C(\gamma)$ を $A(\alpha)$ のまわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点となり,



$$z - \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (\gamma - \alpha)$$

$$\begin{aligned} z &= -i + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)\{s + (t+1)i\} = -i + \frac{1}{2}\{s - \sqrt{3}t - \sqrt{3} + (\sqrt{3}s + t + 1)i\} \\ &= \frac{1}{2}(s - \sqrt{3}t - \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(\sqrt{3}s + t - 1)i \cdots \cdots (*) \end{aligned}$$

- (2) 与えられた条件 $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ より,

$$4 + \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 0, \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

ここで, AC は AB を正の向きに回転したものであるから, $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 1 + \sqrt{3}i$ となり,

$$\gamma = \alpha + (1 + \sqrt{3}i)(\beta - \alpha) = -i + (1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = 2 + \sqrt{3} + (-2 + 2\sqrt{3})i$$

すると, $s = 2 + \sqrt{3}$, $t = -2 + 2\sqrt{3}$ となるので, (*) から,

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 6 - \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + 3 - 2 + 2\sqrt{3} - 1)i \\ &= -2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

- (3) まず, xy 平面を対応させて, $A(0, -1)$, $B(2, -2)$, $C(2 + \sqrt{3}, -2 + 2\sqrt{3})$, $D(-2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ とおくと,

$$\overrightarrow{AC} = (2 + \sqrt{3}, -1 + 2\sqrt{3}), \quad \overrightarrow{BD} = (-4 + \sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$$

すると, \overrightarrow{AC} と \overrightarrow{BD} のなす角が θ となり,

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + (-1 + 2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-4 + \sqrt{3})^2 + (2 + 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{35}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (2 + \sqrt{3})(-4 + \sqrt{3}) + (-1 + 2\sqrt{3})(2 + 2\sqrt{3}) = 5$$

よって, $\cos \theta = \frac{5}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{35}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$ である。

[解説]

複素数平面に関する標準的な問題です。(3)は慣れ親しんでいる xy 平面を対応させ, ベクトルの内積を利用しています。

8

[東北大]

(1) $z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \cdots \cdots (*)$ に対して、共役複素数をとると、

$$\bar{z}z + \bar{\alpha}z + \bar{\beta}z + \bar{\gamma} = 0 \cdots \cdots (**)$$

(*)と(**)の両辺の差をとると、 $(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ (2) γ は実数なので $\gamma = \bar{\gamma}$ となり、 $\textcircled{1}$ より、

$$(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} = 0, (\alpha - \bar{\beta})z = (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

すると、 $\textcircled{2}$ から $(\alpha - \bar{\beta})z = (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z}$ となり、 $(\alpha - \bar{\beta})z$ は実数である。そこで、 k を実数として、 $(\alpha - \bar{\beta})z = k \cdots \cdots \textcircled{3}$ とおく。(i) $\alpha - \bar{\beta} = 0$ のとき(*)から、 $z\bar{z} + \beta\bar{z} + \beta\bar{z} + \gamma = 0$ となるので、

$$(z + \beta)(\bar{z} + \bar{\beta}) - \beta\bar{\beta} + \gamma = 0, |z + \beta|^2 = |\beta|^2 - \gamma$$

ここで、 γ は負の実数なので $|\beta|^2 - \gamma > 0$ となり、 $|z + \beta| = \sqrt{|\beta|^2 - \gamma}$ すると、複素数平面上で、点 z は点 $-\beta$ を中心とする半径 $\sqrt{|\beta|^2 - \gamma}$ の円周上の点となり、無数に存在する。これより、 z がちょうど 2 個あることに反する。(ii) $\alpha - \bar{\beta} \neq 0$ のとき $\textcircled{3}$ から、 $z = \frac{k}{\alpha - \bar{\beta}} = \frac{k}{|\alpha - \bar{\beta}|^2}(\bar{\alpha} - \beta)$ となり、(*)に代入すると、

$$\frac{k^2}{|\alpha - \bar{\beta}|^2} + \alpha \cdot \frac{k}{|\alpha - \bar{\beta}|^2}(\bar{\alpha} - \beta) + \beta \cdot \frac{k}{|\alpha - \bar{\beta}|^2}(\alpha - \bar{\beta}) + \gamma = 0$$

$$k^2 + k\alpha(\bar{\alpha} - \beta) + k\beta(\alpha - \bar{\beta}) + \gamma|\alpha - \bar{\beta}|^2 = 0$$

ここで、 $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ から $\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta}$ なので、 $k^2 + \gamma|\alpha - \bar{\beta}|^2 = 0$ となり、 $-\gamma > 0$ 、 $|\alpha - \bar{\beta}| > 0$ より、

$$k = \pm\sqrt{-\gamma}|\alpha - \bar{\beta}|$$

そして、この値を $k = k_1, k_2 (k_1 < k_2)$ とおくと、 $z = \frac{k_1}{\alpha - \bar{\beta}}, \frac{k_2}{\alpha - \bar{\beta}}$ となる。(i)(ii)より、 z がちょうど 2 個あるための必要十分条件は $\alpha - \bar{\beta} \neq 0$ である。

[解説]

複素数に関する標準的な問題です。(1)で導いた式が(2)へのスムーズな誘導になっています。

9

[京都大]

(1) $w + \frac{1}{w} = x + yi$ ……①に対し, $|w| = R$ ($R > 1$) のとき, θ を任意の実数として,

$$w = R(\cos \theta + i \sin \theta) \dots\dots\dots ②$$

①②より, $x + yi = R(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{R}\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}$ となり,

$$x + yi = \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos \theta + i\left(R - \frac{1}{R}\right)\sin \theta$$

$$x = \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos \theta \dots\dots\dots ③, \quad y = \left(R - \frac{1}{R}\right)\sin \theta \dots\dots\dots ④$$

③より $\cos \theta = \frac{R}{R^2 + 1}x$, ④より $\sin \theta = \frac{R}{R^2 - 1}y$ なので,

$$\left(\frac{R}{R^2 + 1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{R}{R^2 - 1}\right)^2 y^2 = 1 \dots\dots\dots ⑤$$

よって, 点 (x, y) の軌跡は, ⑤で表される楕円である。

(2) $\arg w = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) のとき, r を正の実数として,

$$w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \dots\dots\dots ⑥$$

(1)と同様にすると, ①⑥より, $x + yi = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos \alpha + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin \alpha$ となり,

$$x = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos \alpha \dots\dots\dots ⑦, \quad y = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin \alpha \dots\dots\dots ⑧$$

⑦より $r + \frac{1}{r} = \frac{x}{\cos \alpha}$, ⑧より $r - \frac{1}{r} = \frac{y}{\sin \alpha}$ となり,

$$2r = \frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} \dots\dots\dots ⑨, \quad \frac{2}{r} = \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha} \dots\dots\dots ⑩$$

すると, ⑨⑩より,

$$\left(\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha}\right) = 4, \quad \frac{x^2}{4 \cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{4 \sin^2 \alpha} = 1 \dots\dots\dots ⑪$$

ここで, $r > 0$ から, $r + \frac{1}{r} \geq 2\sqrt{r \cdot \frac{1}{r}} = 2$, また $r - \frac{1}{r}$ は任意の値をとる。

すると, $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha > 0$ で, ⑦から $x \geq 2 \cos \alpha$, ⑧から y は任意の値をとる。

以上より, 点 (x, y) の軌跡は, ⑪で表される双曲線である。ただし, $x \geq 2 \cos \alpha$ の部分である。

[解説]

複素数と軌跡に関する標準的な問題です。なお, (2)では x に限界があり, 軌跡は双曲線の右の枝になります。

10

[東京大]

(1) 条件より、 $z \neq 0$ のとき $w = \frac{1}{z}$ から、 $z = \frac{1}{w}$ ($w \neq 0$) ……①

さて、点 z が点 α ($\alpha \neq 0$) と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線 L 上を動くとき、

$$|z| = |z - \alpha| \dots\dots\dots ②$$

①を②に代入すると、 $|\frac{1}{w}| = |\frac{1}{w} - \alpha|$ 、 $\frac{1}{|w|} = \frac{|1 - \alpha w|}{|w|}$ となり、

$$|1 - \alpha w| = 1, \quad |-\alpha| |w - \frac{1}{\alpha}| = 1, \quad |w - \frac{1}{\alpha}| = \frac{1}{|\alpha|}$$

よって、点 w の軌跡は、中心 $\frac{1}{\alpha}$ で半径 $\frac{1}{|\alpha|}$ の円である。ただし、 $w \neq 0$ より、原点は除く。

(2) $x^3 = 1$ の解は、 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ より、 $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。

すると、条件より、 $\beta = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 、 $\beta^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ となる。

ここで、点 β と点 β^2 を結ぶ直線は、(1)で $\alpha = -1$ として表すことができるので、点 z が点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を動くとき、

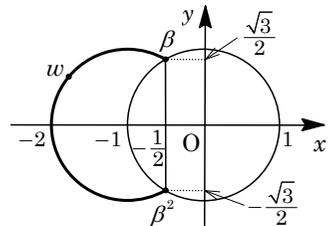
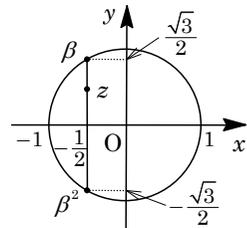
$$|z| = |z + 1| \dots\dots\dots ③, \quad |z| \leq 1 \dots\dots\dots ④$$

①③より、 $|w + 1| = 1$ ($w \neq 0$) ……⑤

①④より、 $|\frac{1}{w}| \leq 1$ となり、 $|\frac{1}{w}| \leq 1$ から、 $|w| \geq 1$ ……⑥

⑤⑥より、点 w の軌跡は、点 -1 を中心とする半径 1 の円周上で、原点を中心とする半径 1 の円の外部または周上の部分となる。

図示すると、右図の太線の弧である。ただし、両端点 β 、 β^2 は含む。



[解説]

複素数平面上の変換を題材とした基本的な問題です。直線や円の絶対値による表現方法が問われています。

11

[北海道大]

(1) 原点 O , 点 $A(\alpha)$, 点 $B(\beta)$ を頂点とする $\triangle OAB$ について,

$$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq \beta \cdots \cdots \textcircled{1}$$

このとき, 点 $P(z)$ は $\triangle OAB$ の外心なので, 辺 OA および辺 OB の垂直二等分線の交点となり,

$$|z| = |z - \alpha| \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad |z| = |z - \beta| \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで, $z = \alpha\beta$ を $\textcircled{2}$ に代入すると, $|\alpha\beta| = |\alpha\beta - \alpha|$ となり, $\textcircled{1}$ から $|\alpha| \neq 0$ より,

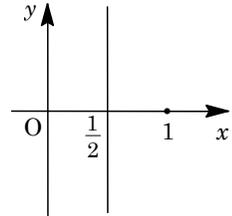
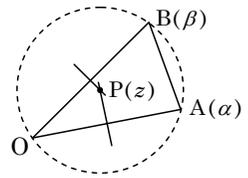
$$|\alpha| |\beta| = |\alpha| |\beta - 1|, \quad |\beta| = |\beta - 1| \cdots \cdots \textcircled{4}$$

同様に, $z = \alpha\beta$ を $\textcircled{3}$ に代入すると, $|\alpha\beta| = |\alpha\beta - \beta|$ となり, $\textcircled{1}$ から $|\beta| \neq 0$ より,

$$|\alpha| |\beta| = |\alpha - 1| |\beta|, \quad |\alpha| = |\alpha - 1| \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}\textcircled{5}$ より, 点 $A(\alpha)$, 点 $B(\beta)$ は, ともに原点と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。ただし, $\textcircled{1}$ から $\alpha \neq \beta$ である。

以上より, α の満たすべき条件は $|\alpha| = |\alpha - 1|$ であり, 点 $A(\alpha)$ の描く図形は右図の直線である。



(2) (1) より, $\alpha = \frac{1}{2} + ai$, $\beta = \frac{1}{2} + bi$ ($a \neq b$) とおくことができ,

$$z = \alpha\beta = \left(\frac{1}{2} + ai\right)\left(\frac{1}{2} + bi\right) = \left(\frac{1}{4} - ab\right) + \frac{1}{2}(a+b)i$$

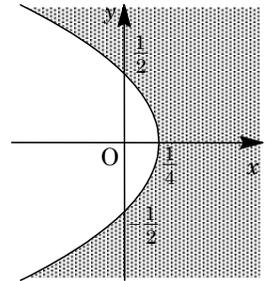
ここで, $z = x + yi$ とおくと, $x = \frac{1}{4} - ab$, $y = \frac{1}{2}(a+b)$ となり,

$$a+b = 2y \cdots \cdots \textcircled{6}, \quad ab = \frac{1}{4} - x \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{6}\textcircled{7}$ より, a, b ($a \neq b$) は, t についての 2 次方程式 $t^2 - 2yt + \left(\frac{1}{4} - x\right) = 0$ の異なる実数解となり, その条件は,

$$D/4 = y^2 - \left(\frac{1}{4} - x\right) > 0, \quad y^2 > -\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

よって, 点 $P(z)$ の存在範囲を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。



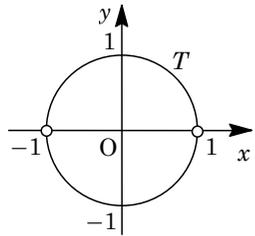
[解説]

複素数と図形に領域が絡んだ問題です。(1)は共役複素数を用いた形で, $\alpha + \bar{\alpha} = 1$ を結論としてもよいでしょう。なお, O, A, B が一直線上にないということについては, (1)の結果から満たしていることがわかります。

12

[東京工大]

(1) $f(x) = x^2 + cx + 1$ (c は実数) に対して、 $f(x) = 0$ の解がすべて T 上にある条件は、2つの解がともに虚数で、しかも絶対値が1ということである。



そこで、解を $x = \alpha, \bar{\alpha}$ とおくと、解と係数の関係から $\alpha\bar{\alpha} = 1$ ($|\alpha|^2 = 1$) となり、 $|\alpha| = 1$ は満たされている。

よって、求める条件は、解が虚数すなわち $D = c^2 - 4 < 0$ から $-2 < c < 2$ である。

(2) $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ (a, b は実数) に対して、 $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるとき、4つの解はすべて虚数で、しかも絶対値が1である。これより、解を $x = \alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ とおき、 $F(x)$ の x^4 の係数が1であることに注意すると、

$$F(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - \beta)(x - \bar{\beta}) \\ = \{x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}\} \{x^2 - (\beta + \bar{\beta})x + \beta\bar{\beta}\}$$

ここで、 $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$ 、 $\beta\bar{\beta} = |\beta|^2 = 1$ で、また $\alpha + \bar{\alpha}$ 、 $\beta + \bar{\beta}$ はともに実数なので、それぞれ $-c_1$ 、 $-c_2$ とおくと、 $F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$ と表せる。

(3) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は、(1)(2)から、

$$F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1) \quad (-2 < c_1 < 2, -2 < c_2 < 2)$$

すると、 $F(x) = x^4 + (c_1 + c_2)x^3 + (c_1c_2 + 2)x^2 + (c_1 + c_2)x + 1$ となり、

$$c_1 + c_2 = a \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad c_1c_2 + 2 = b \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より、 c_1, c_2 は2次方程式 $t^2 - at + (b - 2) = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$ の2つの解となる。

ここで、③の左辺を $g(t)$ とおき変形すると、 $g(t) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b - 2$ となり、

$g(t) = 0$ の解がともに $-2 < t < 2$ から、求める条件は、

$$-\frac{a^2}{4} + b - 2 \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad -2 < \frac{a}{2} < 2 \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad g(-2) = 2 + 2a + b > 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

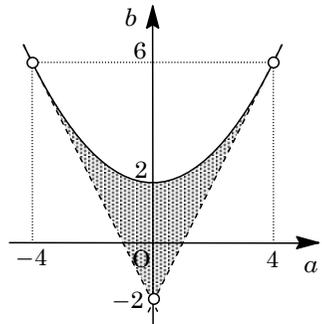
$$g(2) = 2 - 2a + b > 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

④~⑦をまとめると、 $b \leq \frac{a^2}{4} + 2$ 、 $-4 < a < 4$

$$b > -2a - 2, \quad b > 2a - 2$$

点 (a, b) の範囲を図示すると、右図の網点部となる。

ただし、実線の境界線のみ領域に含む。



[解説]

複素数と方程式の標準的な問題です。丁寧な誘導のため、結論に至る流れはスムーズです。