10　　［熊本大］

半径 1 の円に外接する△ABC について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x, y を求めよ。

$\boxed{11}$ ［千葉大］

曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が t $(t \geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　C の方程式を求めよ。

(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。

12　　［神戸大］

n を自然数とする。$f(x)=\sin x-nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，以下の問いに答えよ。

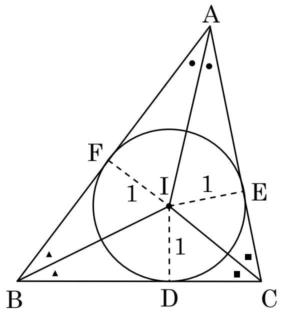
(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ。

(3)　(2)における解を x_n とする。$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示し，$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$ を求めよ。

10　　　　［熊本大］

(1)　△ABC の半径 1 の内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とおくと，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ から，



$$\mathrm{AF}=\mathrm{AE}=\frac{1}{\tan x},\quad \mathrm{BD}=\mathrm{BF}=\frac{1}{\tan y}$$

$$\mathrm{CE}=\mathrm{CD}=\frac{1}{\tan z}$$

そこで，△ABC の内心を I，その面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABI}+\triangle\mathrm{BCI}+\triangle\mathrm{CAI}\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}\Big)\cdot 1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\Big)\cdot 1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan z}+\frac{1}{\tan x}\Big)\cdot 1\\&=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\end{aligned}$$

(2)　$z=\frac{\pi}{6}$ のとき，$x+y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ となり，(1)より，

$$S=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}+\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\tan x}+\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}+\sqrt{3}$$

ここで，$t=\tan x$ とおくと，$0<x<\frac{\pi}{3}$ から $0<t<\sqrt{3}$ となり，

$$S=\frac{1}{t}+\frac{1+\sqrt{3}t}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}-\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}$$

$$\begin{aligned}S'&=-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{(\sqrt{3}-t)^2}=\frac{3t^2+2\sqrt{3}t-3}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}\\&=\frac{(3t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	$3\sqrt{3}$	↗	

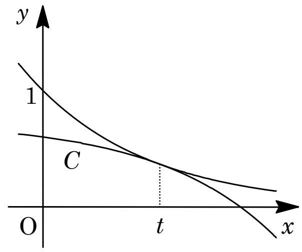
すると，S の増減は右表のようになり，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $3\sqrt{3}$ をとる。このとき，$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ から $x=\frac{\pi}{6}$ であり，$y=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ となる。

［解　説］

図形がらみの微分と増減に関する問題です。(2)では絶対不等式の利用も考えましたが，結局はオーソドックスな微分法ということに落ち着きました。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］

(1)　曲線 $y=-e^x$ を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動した曲線 C の方程式は,



$$y=-e^{x-a}+b \cdots\cdots\cdots ①$$

また, 曲線 C は曲線 $y=e^{-x}$ ……②と $x=t$ $(t\geqq 0)$ で接するので, ①より $y'=-e^{x-a}$, ②より $y'=-e^{-x}$ から,

$$-e^{t-a}=-e^{-t} \cdots\cdots\cdots ③$$

$$-e^{t-a}+b=e^{-t} \cdots\cdots\cdots ④$$

③から, $t-a=-t$ より $a=2t$ となり, この式を④に代入すると, $-e^{-t}+b=e^{-t}$ から $b=2e^{-t}$ となるので, ①に代入して,

$$C: y=-e^{x-2t}+2e^{-t} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(2)　C と x 軸との交点は, ⑤より $-e^{x-2t}+2e^{-t}=0$ から, $e^{x-2t}=2e^{-t}$

$$x-2t=\log 2e^{-t}=\log 2-t,\ \ x=t+\log 2$$

すると, C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\int_0^{t+\log 2}(-e^{x-2t}+2e^{-t})dx=\left[-e^{x-2t}+2e^{-t}x\right]_0^{t+\log 2}$$

$$=-e^{-t+\log 2}+e^{-2t}+2(t+\log 2)e^{-t}=2(t-1+\log 2)e^{-t}+e^{-2t}$$

(3)　(2)より, $S'(t)=2e^{-t}-2(t-1+\log 2)e^{-t}-2e^{-2t}=-2e^{-t}(t-2+\log 2+e^{-t})$

ここで, $f(t)=t-2+\log 2+e^{-t}$ とおくと,

$$f'(t)=1-e^{-t}$$

これより, $t\geqq 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$
$f(t)$	$-1+\log 2$	$\nearrow$

すると, $f(0)=-1+\log 2<0$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$ から, $f(\alpha)=0$ となる $\alpha>0$ がただ1つ存在する。

この α を用いて $t\geqq 0$ における $S(t)$ の増減を調べると, 右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

これより, $S(t)$ は $t=\alpha$ のとき最大値をとる。

すなわち, $S(t)$ が最大となるような t の値はただ1つ存在する。

［解　説］

微積分の総合問題です。2 つの曲線の式が似ているので, 混乱しないように注意が必要です。

12　　［神戸大］

(1)　n を自然数とし，$f(x)=\sin x-nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ に対して，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$f'(x)=\cos x-2nx+\frac{1}{3}x^2,\ f''(x)=-\sin x-2n+\frac{2}{3}x,\ f'''(x)=-\cos x+\frac{2}{3}$$

すると，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ となる $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在し，このとき $f''(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで，$f''(0)=-2n<0$ であり，

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-2n+\frac{\pi}{3}\leqq-1-2+\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}(-9+\pi)<0$$

よって，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ である。

(2)　(1)より，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)$ は単調減少となり，

$$f'(0)=1>0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-n\pi+\frac{\pi^2}{12}\leqq-\pi+\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi}{12}(-12+\pi)<0$$

すると，$f'(\beta)=0$ となる $\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ここで，$f(0)=0$ から $f(\beta)>0$ であり，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{n\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}\leqq1-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}=-\frac{1}{72}\{\pi^2(18-\pi)-72\}<0$$

すると，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に $f(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在する。

(3)　$f(x_n)=0\left(0<x_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$\sin x_n-nx_n{}^2+\dfrac{1}{9}x_n{}^3=0$ となり，

$$nx_n{}^2=\sin x_n+\frac{1}{9}x_n{}^3,\ x_n{}^2=\frac{\sin x_n}{n}+\frac{1}{9}\cdot\frac{x_n{}^3}{n}$$

ここで，$0<\sin x_n<1$，$0<x_n{}^3<\dfrac{\pi^3}{8}$ より，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{\sin x_n}{n}\to0$，$\dfrac{x_n{}^3}{n}\to0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n{}^2=0$ から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ である。

また，$nx_n=\dfrac{\sin x_n}{x_n}+\dfrac{1}{9}x_n{}^2$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=1+\frac{1}{9}\cdot0=1$$

［解　説］

微分と増減に極限が融合した典型題です。なお，スペースの関係上，$3<\pi<4$ を利用した部分については省いています。