

6

[東北大]

a, b, c を実数とし,

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx, \quad J(a, b, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$$

とおく。ただし, $a \neq 0$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $I(a, b)$ を求めよ。
- (2) $J(a, b, c)$ を $I(a, b+c)$ と $I(a, b-c)$ を用いて表せ。
- (3) 次の極限を求めよ。 $\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$

7

[東京医歯大]

連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t) dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t) dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t) dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) a と $f(0) + f(1)$ の値を求めよ。
- (2) $g(x) = e^{-2x} f(x)$ とおくと、 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

6

[東北大]

$$(1) (e^{ax} \cos bx)' = ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(e^{ax} \sin bx)' = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より, $(ae^{ax} \cos bx + be^{ax} \sin bx)' = (a^2 + b^2)e^{ax} \cos bx$ となり,

$$e^{ax} \cos bx = \frac{1}{a^2 + b^2} \{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)\}'$$

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \left\{ e^{\frac{\pi}{2}a} \left(a \cos \frac{\pi}{2} b + b \sin \frac{\pi}{2} b \right) - a \right\}$$

$$(2) J(a, b, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \{ \cos(b+c)x - \cos(b-c)x \} \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} I(a, b+c) + \frac{1}{2} I(a, b-c)$$

$$(3) F(t) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx \text{ とおくと,}$$

$$F(t) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin 4tx - \sin 2tx)(\sin 6tx - \sin 2tx) \, dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin 4tx \sin 6tx - \sin 4tx \sin 2tx - \sin 2tx \sin 6tx + \sin^2 2tx) \, dx$$

$$= 2J(1, 6t, 4t) - 2J(1, 4t, 2t) - 2J(1, 6t, 2t) + 2J(1, 2t, 2t)$$

$$= -I(1, 10t) + I(1, 2t) + I(1, 6t) - I(1, 2t) + I(1, 8t) - I(1, 4t)$$

$$- I(1, 4t) + I(1, 0)$$

$$= -I(1, 10t) + I(1, 6t) + I(1, 8t) - 2I(1, 4t) + I(1, 0)$$

さて, $I(1, b) = \frac{1}{1+b^2} \left\{ e^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{2} b + b \sin \frac{\pi}{2} b \right) - 1 \right\}$ となるので,

$$|I(1, b)| \leq \frac{1}{1+b^2} \left\{ e^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos \frac{\pi}{2} b + b \sin \frac{\pi}{2} b \right| + |-1| \right\} \leq \frac{1}{1+b^2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+b^2} + 1 \right)$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{1+b^2}$$

これより $\lim_{b \rightarrow \infty} I(1, b) = 0$ なので, k が自然数のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} I(1, kt) = 0$ となり,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = I(1, 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

[解説]

定積分の計算と極限の融合問題です。誘導が細かいので方針に混乱はないでしょう。

7

[東京医歯大]

(1) $F'(t) = f(t)$ とおくと, $\int_0^x f(t)dt = F(x) - F(0)$ となり,

$$\int_0^x \left\{ \int_0^u f(t)dt \right\} du = \int_0^x \{F(u) - F(0)\} du = \int_0^x F(u) du - F(0)x$$

$$\int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t)dt \right\} du = \int_x^1 \{F(1) - F(u)\} du = F(1)(1-x) - \int_x^1 F(u) du$$

すると, 与えられた条件式は,

$$F(x) - F(0) = 4ax^3 + (1-3a)x$$

$$+ \int_0^x F(u) du - F(0)x + F(1)(1-x) - \int_x^1 F(u) du \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の両辺を x で微分すると,

$$F'(x) = 12ax^2 + (1-3a) + F(x) - F(0) - F(1) + F(x)$$

$$f(x) = 12ax^2 + 1 - 3a + 2F(x) - F(0) - F(1) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで, ①に $x=0$ を代入すると, $0 = F(1) - \int_0^1 F(u) du \cdots \cdots \textcircled{3}$

①に $x=1$ を代入すると, $F(1) - F(0) = 4a + 1 - 3a + \int_0^1 F(u) du - F(0)$ より,

$$F(1) = a + 1 + \int_0^1 F(u) du \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③④から, $a + 1 = 0$ となり, $a = -1$ である。

すると, ②から, $f(x) = -12x^2 + 4 + 2F(x) - F(0) - F(1) \cdots \cdots \textcircled{5}$

⑤に $x=0$, $x=1$ を代入すると,

$$f(0) = 4 + F(0) - F(1) \cdots \cdots \textcircled{6}, \quad f(1) = -8 + F(1) - F(0) \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑥⑦より, $f(0) + f(1) = 4 - 8 = -4 \cdots \cdots \textcircled{8}$ である。

(2) ⑤の両辺を x で微分すると, $f'(x) = -24x + 2F'(x) = -24x + 2f(x) \cdots \cdots \textcircled{9}$

ここで, $g(x) = e^{-2x} f(x)$ とおくとき, ⑨から,

$$g'(x) = -2e^{-2x} f(x) + e^{-2x} f'(x) = -2e^{-2x} f(x) + e^{-2x} \{-24x + 2f(x)\}$$

$$= -24xe^{-2x}$$

(3) (2)より, $g(x) = -24 \int xe^{-2x} dx$ となり, C を定数として,

$$g(x) = 12xe^{-2x} - 12 \int e^{-2x} dx = 12xe^{-2x} + 6e^{-2x} + C = 6(2x+1)e^{-2x} + C$$

すると, $f(x) = e^{2x} g(x)$ より, $f(x) = 6(2x+1) + Ce^{2x}$ となり, ⑧から,

$$(6+C) + (18+Ce^2) = -4, \quad C = -\frac{28}{1+e^2}$$

以上より, $f(x) = 6(2x+1) - \frac{28}{1+e^2} e^{2x}$ である。

[解説]

いわゆる微分型の積分方程式を解く問題です。問題文で与えられた関係式には驚きますが、誘導がていねいなので、方針に迷うことはないでしょう。