4 ［千葉大］

数列$\{a_n\}$を次の条件によって定める。

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=1+\frac{1}{1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_5を求めよ。

(2)　a_{n+1}をa_nの式で表せ。

(3)　無限級数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$が収束することを示し，その和を求めよ。

5　　　　［神戸大］

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2)　次の等式を満たす S の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-S=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

(3)　不等式 $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx \leqq \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を $[\,a\,]$ で表す。記号 $[\quad]$ をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

(1)　n を $0 \leqq n \leqq N$ を満たす整数とする。点 $(n,\ 0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

(2)　直線 $y = x$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。

(3)　曲線 $y = N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$ $(0 \leqq x \leqq N)$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2)の $A(N)$ に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。

4　　　　［千葉大］

(1)　$a_1=2$ で，$b_n=1-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$ とおくと，$a_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ ……①となり，

$$b_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ a_2=1+\frac{1}{b_1}=1+2=3$$

$$b_2=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6},\ a_3=1+\frac{1}{b_2}=1+6=7$$

$$b_3=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{42},\ a_4=1+\frac{1}{b_3}=1+42=43$$

$$b_4=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}\right)=\frac{1}{1806},\ a_5=1+\frac{1}{b_4}=1+1806=1807$$

(2)　①より，$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{b_n}$ から $a_{n+1}\neq 1$ で，しかも $a_1\neq 1$ なので，$a_n\neq 1$ である。

これより，$b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$ ……②となり，$n\geqq 2$ で $b_{n-1}=\dfrac{1}{a_n-1}$ ……③である。

すると，②－③から，$b_n-b_{n-1}=\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}$ となり，

$$-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1},\ \frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}$$

よって，$n\geqq 2$ で，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$ ………④

$n=1$ のときは，$a_2-1=3-1=2$，$a_1(a_1-1)=2\cdot 1=2$ となり，このときも④は成立しているので，$n\geqq 1$ で，

$$a_{n+1}=a_n(a_n-1)+1\ \text{………⑤}$$

(3)　⑤から，$a_{n+1}-a_n=a_n{}^2-2a_n+1=(a_n-1)^2>0$ となり，$a_n\geqq a_1=2$ なので，

$$a_{n+1}\geqq a_n(2-1)+1=a_n+1$$

すると，$a_n\geqq 2+(n-1)=n+1$ から，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となる。

さて，$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}=1-b_n$ なので，②から，$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}=1-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)=1$$

［解　説］

漸化式と極限の問題です。与えられた漸化式は扱いにくそうですが，誘導に従えばそれほどではありません。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}=\sum_{k=0}^{n}(-e^{-x})^k=\frac{1-(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}=\frac{1-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$ より，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) ①の両辺を 0 から 1 まで積分すると，

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}\,dx-\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ となり，

$$\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1=\log\frac{e+1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}\,dx&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\\&=(-1)^0\int_0^1 e^0\,dx+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\\&=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Big[\frac{e^{-kx}}{-k}\Big]_0^1=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}\end{aligned}$$

②より，$\displaystyle 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-\log\frac{e+1}{2}=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ となり，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\log\frac{e+1}{2}-1=\log\frac{e+1}{2e}$$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ において，$1+e^{-x}\geqq 1$ より，

$$\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\int_0^1 e^{-(n+1)x}dx=\Big[-\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1-e^{-(n+1)}}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}$$

すると，$\displaystyle\left|(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|=\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\frac{1}{n+1}$ から，$n\to\infty$ のとき，

$$\left|(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|\to 0,\quad (-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\to 0$$

ここで，(2)から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\log\frac{e+1}{2e}+(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ なので，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\log\frac{e+1}{2e}+\lim_{n\to\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\log\frac{e+1}{2e}$$

［解 説］

定積分と無限級数の融合問題です。細かく誘導がつけられているので，方針に迷うことはないでしょう。

$\boxed{6}$ ［筑波大］

(1) 点$(n,\ 0)$と点$\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$を結ぶ線分上の格子点の座標を$(n,\ l)$とおくと，

$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]$より，その個数は$\left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]+1$である。

(2) 直線$y=x$, x軸，$x=N$で囲まれた領域(境界含む)にある格子点の個数$A(N)$は，

$$A(N)=1+\sum_{k=1}^{N}(k+1)=\sum_{k=1}^{N+1}k=\frac{1}{2}(N+1)(N+2)\cdots\cdots\cdots①$$

(3) 曲線$y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)(0\leqq x\leqq N)$，$x$軸，直線$x=N$で囲まれた領域(境界含む)

にある格子点の個数$B(N)$は，

$$B(N)=1+\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]+1\right\}=N+1+\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\cdots\cdots\cdots②$$

さて，一般的に，$[a]\leqq a<[a]+1$から，$a-1<[a]\leqq a$となり，

$$N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-1<\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-N<\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

②より，$1+N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)<B(N)\leqq N+1+N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$となり，①から，

$$\frac{2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}<\frac{B(N)}{A(N)}\leqq\frac{2N+2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$$

さて，$I(N)=\dfrac{2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$，$J(N)=\dfrac{2N+2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$とおくと，

$$I(N)=\frac{2}{(N+1)(N+2)}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$J(N)=\frac{2}{N+2}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

すると，$N\to\infty$のとき，$\dfrac{\pi}{2N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\to\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$より，

$$I(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi},\quad J(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi}$$

したがって，$I(N)<\dfrac{B(N)}{A(N)}\leqq J(N)$から，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}=\frac{4}{\pi}$となる。

［解　説］

格子点の個数を題材にした数列の極限の問題ですが，それに区分求積が絡むという味付けが施されています。