$\boxed{12}$ ［東京大］

$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。

(1)　$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2)　次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

13　　［金沢大・文］

関数$f(x)$は等式 $f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)dt$ を満たすとし，$\int_0^2 f(t)dt=a$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(2)$をaを用いて表せ。

(2) aの値を求めよ。

(3) k は定数とする。$y=xf(x)-k$のグラフと$y=ax^2$のグラフの共有点の個数を求めよ。

14　　［千葉大］

a を正の数とし，t は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2)領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

(3)　s は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

12　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$f(x)=x^3-3a^2x\quad(a>0)$ に対して，$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

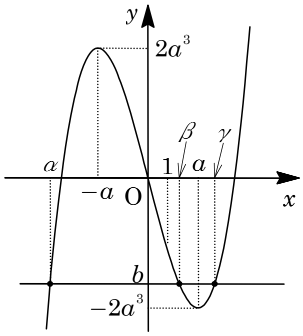
これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

すると，$x\geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加する条件は，$0<a\leqq 1$ である。

(2)　方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもち，その解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると，$\alpha<-a<\beta<a<\gamma$ であり，しかも $\beta>1$ である条件は，右図から，

$$a>1\cdots\cdots\cdots①$$
$$-2a^3<b<f(1)=1-3a^2\cdots\cdots\cdots②$$



ここで，②の 2 つの境界線 $b=-2a^3$ と $b=1-3a^2$ の関係は，両式を連立すると，

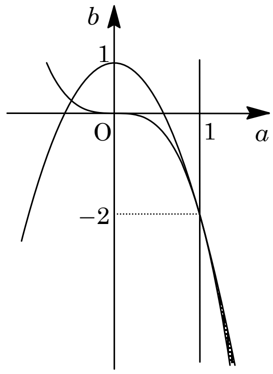
$$-2a^3=1-3a^2,\ 2a^3-3a^2+1=0$$
$$(2a+1)(a-1)^2=0$$

よって，$a=-\dfrac{1}{2}$ で交わり，$a=1$ で接する。

以上より，点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲は，①②から，

$$a>1,\ -2a^3<b<1-3a^2$$

この不等式を ab 平面上に図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



［解 説］

微分の方程式への応用問題です。内容は基本的です。

$\boxed{13}$　　　　［金沢大・文］

(1)　条件より，$f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)dt=|x-1|+x\int_0^2 f(t)dt$

ここで，$\int_0^2 f(t)dt=a$ ……①とおくと，$f(x)=|x-1|+ax$ ……②となり，

$f(2)=|2-1|+2a=1+2a$

(2)　②より，$f(x)=x-1+ax=(a+1)x-1\ \ (x\geqq 1)$

$f(x)=-x+1+ax=(a-1)x+1\ \ (x<1)$

①に代入すると，

$$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1\{(a-1)t+1\}dt+\int_1^2\{(a+1)t-1\}dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}(a-1)t^2+t\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}(a+1)t^2-t\right]_1^2=\frac{1}{2}(a-1)+1+\frac{1}{2}(a+1)\cdot 3-1$$

$$=2a+1$$

よって，$a=-1$となる。

(3)　(2)より，$f(x)=-1\ (x\geqq 1)$，$f(x)=-2x+1\ (x<1)$

ここで，$y=xf(x)-k$ ……③と $y=-x^2$ ……④を連立すると，

$xf(x)-k=-x^2$，$xf(x)+x^2=k$

すると，$y=xf(x)+x^2$ ……⑤のグラフと $y=k$ ……⑥のグラフの共有点の個数は，③のグラフと④のグラフの共有点の個数に一致し，⑤より，

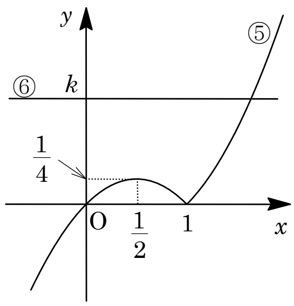
(i)　$x\geqq 1$のとき

$$xf(x)+x^2=-x+x^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

(ii)　$x<1$のとき

$$xf(x)+x^2=x(-2x+1)+x^2=-x^2+x$$

$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



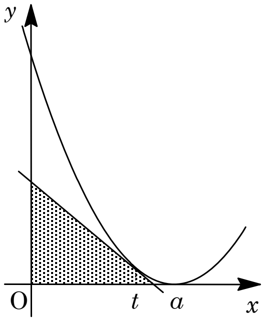
(i)(ii)より，③と④のグラフの共有点の個数は，右図より，

1個$\left(k<0,\ \frac{1}{4}<k\right)$，2個$\left(k=0,\ \frac{1}{4}\right)$，3個$\left(0<k<\frac{1}{4}\right)$

［解　説］

置換え型の積分方程式と 2 次関数と方程式の融合問題です。誘導が詳しいので，方針は明快です。

14 ［千葉大］



(1)　曲線 $y=(x-a)^2$ に対し $y'=2(x-a)$ となり，$0\leqq t<a$ において，点 $(t,\ (t-a)^2)$ における接線の方程式は，

$$y-(t-a)^2=2(t-a)(x-t)$$

$$y=2(t-a)x-t^2+a^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

すると，①と y 軸との交点は $(0,\ -t^2+a^2)$ となり，また x 軸との交点は $\left(\dfrac{t+a}{2},\ 0\right)$ である。

そこで，接線①と x 軸および y 軸で囲まれた領域 $D(t)$ の面積を $S(t)$ とおくと，

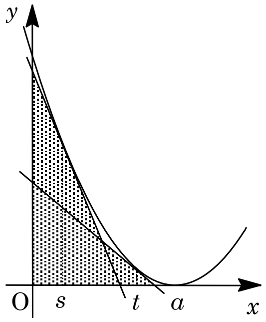
$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+a}{2}(-t^2+a^2)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)\cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　②より，$S'(t)=\dfrac{1}{4}(-3t^2-2at+a^2)=-\dfrac{1}{4}(3t-a)(t+a)$

すると，$0\leqq t<a$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$S(t)$ は $t=\dfrac{a}{3}$ のとき最大となり，最大値は，

t	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗		↘	

$$S\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{a^3}{27}-\frac{a^3}{9}+\frac{a^3}{3}+a^3\right)=\frac{8}{27}a^3$$



(3)　$0\leqq s\leqq t<a$ のとき，点 $(s,\ (s-a)^2)$ における接線の方程式は，①より，

$$y=2(s-a)x-s^2+a^2\cdots\cdots\cdots ③$$

さて，2 つの領域 $D(t)$ と $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t)\cup D(s)$ の面積を $T(t,\ s)$ とすると，

(i)　$0\leqq s=t<a$ のとき

$T(t,\ s)=S(t)$ より，(2)から最大値は $\dfrac{8}{27}a^3$ である。

(ii)　$0\leqq s<t<a$ のとき

①③を連立すると，$2(t-a)x-t^2+a^2=2(s-a)x-s^2+a^2$ から，

$$2(t-s)x=t^2-s^2,\ \ x=\frac{t+s}{2}$$

よって，$T(t,\ s)=S(t)+\dfrac{1}{2}\{(-s^2+a^2)-(-t^2+a^2)\}\cdot\dfrac{t+s}{2}$ となり，

$$T(t,\ s)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)+\frac{1}{4}(t^3+st^2-s^2t-s^3)\cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，t を $t=t_0\ (0<t_0<a)$ で固定し，s を $0\leqq s<t_0$ で動かすと考え，

$$T(t_0,\ s)=\frac{1}{4}(-t_0{}^3-at_0{}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}(t_0{}^3+t_0{}^2s-t_0s^2-s^3)$$

$$T'(t_0,\ s)=-\frac{1}{4}(3s^2+2t_0s-{t_0}^2)$$
$$=-\frac{1}{4}(3s-t_0)(s+t_0)$$

すると，$0\leqq s<t_0$ における $T(t_0,\ s)$ の増減は右表のようになる。これより，$T(t_0,\ s)$ は $s=\dfrac{t_0}{3}$ のとき最大となり，最大値は,

s	0	$\cdots$	$\dfrac{t_0}{3}$	$\cdots$	t_0
$T'(t_0,\ s)$		$+$	0	$-$	
$T(t_0,\ s)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$T\left(t_0,\ \frac{t_0}{3}\right)=\frac{1}{4}(-{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}\left({t_0}^3+\frac{{t_0}^3}{3}-\frac{{t_0}^3}{9}-\frac{{t_0}^3}{27}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3\right)$$

さらに，この状態を保ったまま t_0 を $0<t_0<a$ で動かすと考え，変数を t_0 から t に戻し $U(t)=T\left(t,\ \dfrac{t}{3}\right)$ とおき直すと，$U(t)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{27}t^3-at^2+a^2t+a^3\right)$ から,

$$U'(t)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{9}t^2-2at+a^2\right)$$
$$=\frac{1}{36}(5t-3a)(t-3a)$$

すると，$0<t<a$ における $U(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{3}{5}a$	$\cdots$	a
$U'(t)$		$+$	0	$-$	
$U(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$U(t)$ は $t=\dfrac{3}{5}a$ のとき最大となり，最大値は,

$$U\left(\frac{3}{5}a\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}\cdot\frac{27}{125}a^3-\frac{9}{25}a^3+\frac{3}{5}a^3+a^3\right)=\frac{8}{25}a^3$$

(i)(ii)より，$T(t,\ s)$ は，$t=\dfrac{3}{5}a$，$s=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5}a=\dfrac{a}{5}$ のとき，最大値 $\dfrac{8}{25}a^3$ をとる。

［解 説］

微分と最大・最小に関する問題です。(3)は 2 変数関数が対象の設問で，1 文字を固定して処理しています。ただ，重複をいとわず丁寧に記述したところ，かなりの分量になってしまいました。