**8**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大・医］

$0<t<3$ を満たす実数 $t$ に対し，平面上の相異なる 4 点 O，A，B，C を次の条件(a)，(b)を満たすようにとる。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を $\theta$ とするとき，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし，$\triangle$OCD の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の最大値を求めよ。

**9**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

$\alpha$ は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

(i)　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。

(ii)　$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DAB} = \alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積 $k = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ が最大となるものについて，$k$ の値を求めよ。

**10**　　［東北大・理］

三角形 ABC の内接円の半径を $r$，外接円の半径を $R$ とし，$h=\dfrac{r}{R}$ とする。また，$\angle\mathrm{A}=2\alpha$，$\angle\mathrm{B}=2\beta$，$\angle\mathrm{C}=2\gamma$ とおく。

(1)　$h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

(2)　三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leqq \sqrt{2}-1$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

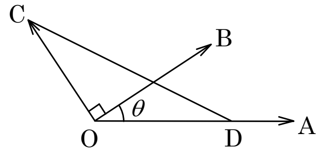
(3)　一般の三角形 ABC に対して $h \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

**8**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大・医］

条件(a)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 $\theta$ に対し，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$ ………①

条件(b)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$ ……②，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ ……③

ここで，$0<t<3$ より，①から $\theta=\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角，②から $\angle\mathrm{AOC}$ は鈍角となり，③より $\angle\mathrm{BOC}$ は直角なので，




$$\angle\mathrm{AOC}=\theta+\frac{\pi}{2}$$

すると，②より，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=t-3$

$$-\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\theta=t-3,\ \ \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\frac{3-t}{\sin\theta}\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，線分 OA を $t:1$ に内分する点 D に対して，$\triangle\mathrm{OCD}$ の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t+1}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\theta$$

④を代入すると，$S(t)=\dfrac{t}{2(t+1)}\cdot\dfrac{3-t}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=\dfrac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}$ となり，①から，

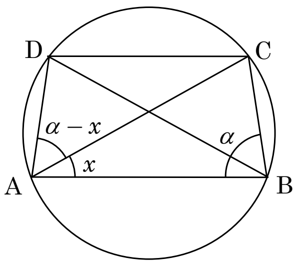
$$S(t)=\frac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot(t+1)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$$

よって，$S(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

［解　説］

ベクトルの内積が絡んだ形式をしていますが，内容は三角比の応用です。

$\boxed{9}$　　［京都大・理］




半径 1 の円に内接する四角形 ABCD に対して，$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{DAB}=\alpha\ \left(0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$から，

$$\angle \mathrm{BCD}=\angle \mathrm{ADC}=\pi-\alpha$$

これより，四角形 ABCD は AB // DC の等脚台形である。

さて，$\angle \mathrm{BAC}=x\ (0<x<\alpha)$ とおくと，$\angle \mathrm{CAD}=\alpha-x$，$\angle \mathrm{ACB}=\pi-(\alpha+x)$となり，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin x}=2\cdot 1,\quad \frac{\mathrm{CD}}{\sin(\alpha-x)}=2\cdot 1,\quad \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\alpha+x)}=2\cdot 1$$

すると，$\mathrm{BC}=2\sin x$，$\mathrm{CD}=2\sin(\alpha-x)$，$\mathrm{AB}=2\sin(\alpha+x)$ となり，$\mathrm{DA}=\mathrm{BC}$ から，4 辺の長さの積 $k=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ は,

$$\begin{aligned}k&=16\sin^2 x\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)=8\sin^2 x(\cos 2x-\cos 2\alpha)\\&=8\sin^2 x(1-2\sin^2 x-1+2\sin^2\alpha)=-16\sin^4 x+16\sin^2\alpha\sin^2 x\\&=-16\left(\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)^2+4\sin^4\alpha\end{aligned}$$

$0<x<\alpha$ なので $0<\sin x<\sin\alpha$ となり，$\sin^2 x=\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha\ \left(\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$のとき，$k$ は最大値 $4\sin^4\alpha$ をとる。

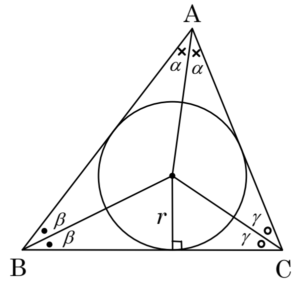
［解 説］

円に内接する台形は等脚台形となりますが，これに正弦定理の適用させて 4 辺の長さを評価する問題です。

**10**　　［東北大・理］

(1) $\triangle$ABC において，$\angle \mathrm{A}=2\alpha$，$\angle \mathrm{B}=2\beta$，$\angle \mathrm{C}=2\gamma$ より，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots①$$




ここで，$\triangle$ABC の内接円の半径 $r$ に対して，

$$\mathrm{BC}=\frac{r}{\tan\beta}+\frac{r}{\tan\gamma}=r\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$
$$=r\cdot\frac{\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}=r\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

①より，$\sin(\beta+\gamma)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ となり，$\mathrm{BC}=r\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\cdots\cdots\cdots②$

また，$\triangle$ABC の外接円の半径 $R$ に対して，正弦定理から，

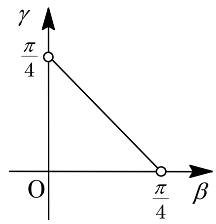
$$\mathrm{BC}=2R\sin2\alpha=4R\sin\alpha\cos\alpha\cdots\cdots\cdots③$$

②③から，$r\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}=4R\sin\alpha\cos\alpha$ となり，$r=4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ より，

$$h=\frac{r}{R}=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdots\cdots\cdots④$$

(2) $\triangle$ABC が直角三角形のとき，$\angle \mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}\ \left(\alpha=\dfrac{\pi}{4}\right)$としても一般性を失わない。

このとき，①から $\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ となり，④より，




$$h=4\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta\sin\gamma=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\frac{\pi}{4}\right\}=\sqrt{2}\cos(\beta-\gamma)-1$$

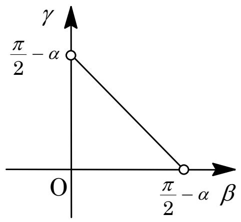
ここで，$-\dfrac{\pi}{4}<\beta-\gamma<\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$ から，

$$h\leqq\sqrt{2}\cdot1-1=\sqrt{2}-1$$

等号は $\cos(\beta-\gamma)=1$ すなわち $\beta=\gamma$ のとき成立するので，このとき$\triangle$ABC は直角二等辺三角形となる。

(3) まず，$\alpha$ を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で固定すると，①から $\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ となり，(2)と同様に，

$$h=4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}=2\sin\alpha\left\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}$$
$$=2\sin\alpha\{\cos(\beta-\gamma)-\sin\alpha\}$$




ここで，$-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)<\beta-\gamma<\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ なので，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$$

すると，$\sin\alpha<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$ から，

$$h\leqq2\sin\alpha(1-\sin\alpha)=2\sin\alpha-2\sin^2\alpha=-2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

そこで，$\alpha$ を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすと，$0<\sin\alpha<1$ から，

$$-2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$h\leqq\dfrac{1}{2}$ となる。

そして，等号が成立するのは，$\beta=\gamma$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときで，$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}$ から，△ABC は正三角形となる。

［解 説］

三角関数の三角形への応用問題です。(3)は 1 文字を固定して最大・最小を考える設問ですが，(2)を誘導としてとらえると，その方針は明快です。