14　　［北海道大・文］

赤色, 青色, 黄色のサイコロが 1 つずつある。この 3 つのサイコロを同時に投げる。赤色, 青色, 黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R, B, Y とし, 自然数 s, t, u を $s=100R+10B+Y$, $t=100B+10Y+R$, $u=100Y+10R+B$ で定める。

(1)　s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ。

(2)　$s>t>u$ となる確率を求めよ。

$\boxed{15}$　　［千葉大・文］

箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色, 1 枚は銀色, 残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し, その色が金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, カードを箱に戻す。この操作を繰り返し, 記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

(1)　確率 $P(4)$ を求めよ。

(2)　確率 $P(6)$ を求めよ。

(3)　確率 $P(11)$ を求めよ。

$\boxed{16}$ ［東北大・理］

n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1)　$p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2)　$p(2)$ を求めよ。

(3)　n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。

17　　　　［岡山大・理］

図 1 のような経路の図があり，次のようなゲームを考える。最初はⒶから出発し，1 回の操作で，1 個のさいころを投げて，出た目の数字が矢印にあればその方向に進み，なければその場にとどまる。この操作を繰り返し，Ⓓに到達したらゲームは終了する。

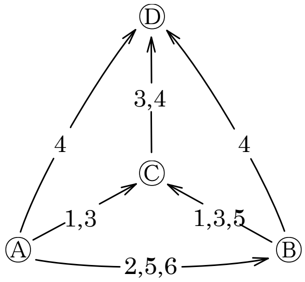


図1：経路の図

例えばⒷにいるときは，1，3，5 の目が出ればⒸへ進み，4 の目が出ればⒹへ進み，2，6 の目が出ればその場にとどまる。n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　ちょうど n 回の操作を行った後にⒷにいる確率を n の式で表せ。

(2)　ちょうど n 回の操作を行った後にⒸにいる確率を n の式で表せ。

(3)　ちょうど n 回の操作でゲームを終了する確率を n の式で表せ。

$\boxed{18}$ ［九州大・理］

1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0，1，2，3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

$\boxed{19}$ ［大阪大・理］

p, q を $0<p<1$, $0<q<1$ を満たす実数とし, n を 2 以上の整数とする。2 つのチーム A, B が野球の試合を n 回行う。1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする。また, A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり, B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする。なお, 試合結果に引き分けはなく, 勝敗が決まるとする。

(1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2) $n\geqq 3$ とする。B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］

(1)　赤色，青色，黄色のサイコロを同時に投げ，出た目の数をそれぞれ R，B，Y とし，自然数 s，t，u を $s=100R+10B+Y$，$t=100B+10Y+R$，$u=100Y+10R+B$ で定める。

ここで，s が 500 以上になるのは，$R=5$，6 で B，Y は任意より，その確率は $\dfrac{1}{3}$ である。同様に，t, u が 500 以上になるのも，確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である。

(i)　s, t, u がすべて 500 以上のとき　その確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$ である。

(ii)　s, t, u の 2 つが 500 以上となるとき　その確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{27}$ である。

(i)(ii)より，s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率は，

$$\frac{1}{27}+\frac{6}{27}=\frac{7}{27}$$

(2)　$s>t$ より $100R+10B+Y>100B+10Y+R$ となり，$11R>10B+Y$ ………①

すると，①を満たす R, B, Y の条件は，

(i)　$R>B$ のとき　任意の Y で①は成立する。

(ii)　$R=B$ のとき　①は $B>Y$ のとき成立する。

(i)(ii)より，$R>B$ または $R=B>Y$ である。

同様に，$t>u$ より $100B+10Y+R>100Y+10R+B$ となり，

$11B>10Y+R$ ………②

すると，②を満たす R, B, Y の条件は，$B>Y$ または $B=Y>R$ である。

よって，$s>t>u$ となる R, B, Y の条件は，①かつ②から，

$R>B>Y$ ………③，$R=B>Y$ ………④

以上より，③となる場合の数は ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通り，④となる場合の数は ${}_6\mathrm{C}_2=15$ 通りなので，求める確率は，$\dfrac{20+15}{6^3}=\dfrac{35}{216}$ である。

［解　説］

確率の標準的な問題です。(2)の①式については，初めは R の値で場合分けをしたのですが，規則性がみつかったため，それをまとめて記したのが上の解答例です。

15　　　　［千葉大・文］

(1)　もとに戻しながら箱からカードを 1 枚ずつ取り出したとき，金，銀，白である確率は，それぞれ$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{n-2}{n}$である。そして，金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，その合計点を考える。

さて，4 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，3 回目までの合計点が 50 点で，4 回目に金という場合だけである。すると，3 回目までは金が 1 回，白が 2 回となり，その確率$P(4)$は，

$$P(4)={}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^2\times\frac{1}{n}=\frac{3(n-2)^2}{n^4}$$

(2)　6 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，5 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

(i)　5 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 6 回目は金であり，5 回目までは金 1 回，白 4 回または銀 5 回となるので，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^4\times\frac{1}{n}+\Big(\frac{1}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}=\frac{5(n-2)^4+1}{n^6}$$

(ii)　5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 6 回目は銀であり，5 回目までは金 1 回，銀 4 回となるので，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^4\times\frac{1}{n}=\frac{5}{n^6}$$

(i)(ii)より，求める確率$P(6)$は，$P(6)=\dfrac{5(n-2)^4+1}{n^6}+\dfrac{5}{n^6}=\dfrac{5(n-2)^4+6}{n^6}$

(2)　11 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，10 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

(i)　10 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 11 回目は金であり，10 回目までは金 1 回，白 9 回または銀 5 回，白 5 回となるので，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^9\times\frac{1}{n}+{}_{10}\mathrm{C}_5\Big(\frac{1}{n}\Big)^5\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}$$

(ii)　5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 11 回目は銀であり，10 回目までは金 1 回，銀 4 回，白 5 回または銀 9 回，白 1 回となるので，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_1\,{}_9\mathrm{C}_4\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^4\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}+{}_{10}\mathrm{C}_9\Big(\frac{1}{n}\Big)^9\cdot\frac{n-2}{n}\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

(i)(ii)より，求める確率 $P(11)$ は,

$$P(11)=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}+\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$
$$=\frac{10(n-2)^9+1512(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

［解 説］

丁寧に場合分けをするタイプの確率の問題です。「はじめて」という条件が与えられているので，その 1 回手前の状態に着目しています。

16 ［東北大・理］

(1)　1から n までの番号札がそれぞれ1枚ずつ，合計 n 枚入っている箱から，1枚の札を無作為に取り出して元に戻すとき，k 回目に取り出した札の番号を X_k とおく。

まず，$X_1 \geqq n$ となるのは $X_1 = n$ から，その確率 $p(1)$ は，$p(1)=\dfrac{1}{n}$ である。

次に，$X_1+X_2+\cdots+X_{n-1} \leqq n-1$ かつ $X_1+X_2+\cdots+X_{n-1}+X_n \geqq n$ となるのは，$X_1 = X_2 = \cdots = X_{n-1} = 1$ で X_n は任意より，その確率 $p(n)$ は，

$$p(n)=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\times 1=\frac{1}{n^{n-1}}$$

(2)　$X_1 \leqq n-1$ かつ $X_1+X_2 \geqq n$ となるのは，$X_1 = k$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ のときは，$X_2 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より，その確率 $p(2)$ は，

$$p(2)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{k+1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)\right\}$$
$$=\frac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$$

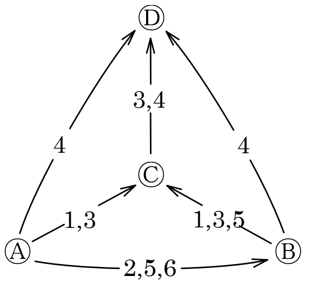
(3)　$n\geqq 3$ のとき，$X_1+X_2 \leqq n-1$ かつ $X_1+X_2+X_3 \geqq n$ となるのは，$X_1+X_2=k$ $(2\leqq k\leqq n-1)$ のときは，$(X_1,\ X_2)$ の組が $(1,\ k-1)$，$(2,\ k-2)$，$\cdots$，$(k-1,\ 1)$ の $k-1$ 通りで，$X_3 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より，その確率 $p(3)$ は，

$$p(3)=\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k-1}{n^2}\cdot\frac{k+1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n-1}(k^2-1)=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$$
$$=\frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-(n-1)\right\}=\frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6n^3}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。題意を読み取る力が問われています。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［岡山大・理］



(1) n 回の操作の後，Ⓐ，Ⓑ，Ⓒにいる確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とおくと，条件より，$a_n=0\ (n\geqq 1)$ である。

また，$b_1=\dfrac{1}{2}$ のもとで，条件より，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n=\frac{1}{3}b_n$$

よって，$b_n=b_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ ………①

(2) $c_1=\dfrac{1}{3}$ のもとで，条件より，

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n=\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n$$

①を代入すると，$c_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}c_n$ ………②

ここで，②を満たす１つの数列を，α を定数として，$c_n=\alpha\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ とおくと，

$$\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

すると，$\dfrac{1}{3}\alpha=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}\alpha$ から $\alpha=-\dfrac{3}{4}$ となるので，

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②－③より，$c_{n+1}+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}=\dfrac{2}{3}\left\{c_n+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ となり，

$$c_n+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left\{c_1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\right\}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$c_n=\dfrac{13}{12}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) Ⓓに到達したらゲームは終了するので，その確率を P_n とおくと，

(i) $n=1$ のとき　Ⓐ→Ⓓの場合から，$P_1=\dfrac{1}{6}$

(ii) $n\geqq 2$ のとき　$a_n=0$ から，Ⓑ→ⒹまたはⒸ→Ⓓの場合より，

$$P_m=\frac{1}{6}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\left\{\frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

［解　説］

確率と漸化式の標準的な問題です。与えられた図から，立式は容易です。なお，漸化式②の解法については，「ピンポイント　レクチャー」を参照してください。

18　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・理］

１から４までの４枚のカードが入っている箱から１枚カードを取り出し，もとに戻す試行を行う。このとき，k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を４で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。

さて，$(X_1X_2\cdots X_n)\times X_{n+1}=(X_1X_2\cdots X_nX_{n+1})$ であるが，この式の両辺について４で割った余りの関係を調べるために，mod 4 ですべてのパターンを記述すると，右表のようになる。

$0\times1\equiv0$	$0\times2\equiv0$	$0\times3\equiv0$	$0\times4\equiv0$
$1\times1\equiv1$	$1\times2\equiv2$	$1\times3\equiv3$	$1\times4\equiv0$
$2\times1\equiv2$	$2\times2\equiv0$	$2\times3\equiv2$	$2\times4\equiv0$
$3\times1\equiv3$	$3\times2\equiv2$	$3\times3\equiv1$	$3\times4\equiv0$

そこで，この表をもとに $X_1X_2\cdots X_n$ を４で割った余りの確率について漸化式を作ると，$p_1=q_1=r_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ で，

$$p_{n+1}=p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots③,\quad s_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$n\geqq 2$ で $q_n=s_n$ となり，$q_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ から $q_n=s_n\cdots\cdots\cdots⑤$

②⑤から，$q_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n$ となり，

$$q_n=q_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},\quad s_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

③に代入すると，$r_{n+1}=\dfrac{1}{2}r_n+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ となり，$2^{n+1}r_{n+1}=2^nr_n+\dfrac{1}{2}$ から，

$$2^nr_n=2r_1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n,\quad r_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

さらに，$p_n=1-q_n-r_n-s_n$ から，

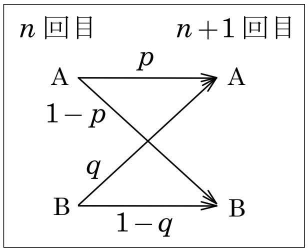
$$p_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

［解　説］

確率と漸化式の標準的な問題です。①から④が立式できれば，その処理は難しくありません。なお，p_n は①を解いても求まりますが，(等差)×(等比)という面倒な和が出てきます。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・理］

(1) n 試合目に A が勝つ確率を a_n とすると，引き分けがないことより，B が勝つ確率は $1-a_n$ となる。



また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であることより，

$$a_{n+1}=pa_n+q(1-a_n)=(p-q)a_n+q$$

変形すると，$a_{n+1}-\dfrac{q}{1-p+q}=(p-q)\left(a_n-\dfrac{q}{1-p+q}\right)$ となり，$a_1=p$ から，

$$a_n-\frac{q}{1-p+q}=\left(a_1-\frac{q}{1-p+q}\right)(p-q)^{n-1}=\left(p-\frac{q}{1-p+q}\right)(p-q)^{n-1}$$
$$=\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}(p-q)^{n-1}=\frac{1-p}{1-p+q}(p-q)^n$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{1-p+q}\{(1-p)(p-q)^n+q\}$ である。

(2) $n\geqq 3$ として，n 回試合を行うとき，B が連勝せずに k 回目と l 回目 $(k<l)$ に勝つとする。このとき勝つチームを並べて示すと，

(i) $k=1$ かつ $l=n$ のとき　B→A→A→A→A→……→A→A→B

A→B が 1 回，B→A が 1 回，A→A が $n-3$ 回より，その確率は，

$$(1-p)\times(1-p)qp^{n-3}=p^{n-3}(1-p)^2q$$

(ii) $2\leqq k\leqq n-2$ かつ $l=n$ のとき　A→B→A→A→A→……→A→A→B など

A→B が 2 回，B→A が 1 回，A→A が $n-4$ 回より，その確率は，$n\geqq 4$ で，

$$p\times{}_{n-3}\mathrm{C}_1(1-p)^2qp^{n-4}=(n-3)p^{n-3}(1-p)^2q$$

(iii) $k=1$ かつ $3\leqq l\leqq n-1$ のとき　B→A→B→A→A→……→A→A→A など

A→B が 1 回，B→A が 2 回，A→A が $n-4$ 回より，その確率は，$n\geqq 4$ で，

$$(1-p)\times{}_{n-3}\mathrm{C}_1(1-p)q^2p^{n-4}=(n-3)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

(iv) $2\leqq k<k+1<l\leqq n-1$ のとき　A→B→A→B→A→……→A→A→A など

A→B が 2 回，B→A が 2 回，A→A が $n-5$ 回で，$(k,\ l)$ の決め方が ${}_{n-3}\mathrm{C}_2$ 通りとなるので，その確率は，$n\geqq 5$ で，

$$p\times{}_{n-3}\mathrm{C}_2(1-p)^2q^2p^{n-5}=\frac{1}{2}(n-3)(n-4)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

(i)〜(iv)より，B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n は，

$$b_n=\{1+(n-3)\}p^{n-3}(1-p)^2q+\frac{1}{2}(n-3)\{2+(n-4)\}p^{n-4}(1-p)^2q^2$$
$$=(n-2)p^{n-3}(1-p)^2q+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$
$$=\frac{1}{2}(n-2)p^{n-4}(1-p)^2q\{2p+(n-3)q\}\quad(n=3,\ 4\text{ のときも成立})$$

［解 説］

(1)は確率と漸化式という頻出題, (2)は数え上げるタイプの確率問題でミスに要注意です。そのため, (2)では n に具体的な数値を代入して, チェックしながら計算を進めていくのが, 1 つの有効な方法となります。