24　　［九州大・文］

以下の問いに答えよ。

(1)　n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2)　自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示 $101101101101101101_{(2)}$ をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。

$\boxed{25}$ ［京都大］

n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

26　　［名古屋大・文］

次の問いに答えよ。

(1) 整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数であることを示せ。

(2) n を奇数とする。このとき$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$を満たす整数$\alpha$，$\beta$は存在しないことを示せ。

(3) c を実数とする。このとき 3 次方程式$x^3-2018x+c=0$の解のうち整数であるものは 1 個以下であることを示せ。

$\boxed{27}$ ［東北大・理］

整数 a, b は等式 $3^a - 2^b = 1$……①を満たしているとする。

(1) a, b はともに正となることを示せ。

(2) $b > 1$ ならば, a は偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。

28　　［千葉大・文］

初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1=7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1)　数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2)　d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。

29 ［東京大・理］

数列 a_1，a_2，$\cdots$ を，$a_n = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1)　$n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2)　a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

$\boxed{24}$　　［九州大・文］

(1)　$\bmod 7$ で記すと $2^3 \equiv 1$ から，2^n を 7 で割った余り r は，k を 0 以上の整数として，

(i)　$n = 3k+1$ のとき　$2^{3k+1} = (2^3)^k \cdot 2 \equiv 1^k \cdot 2 \equiv 2$ より，$r = 2$

(ii)　$n = 3k+2$ のとき　$2^{3k+2} = (2^3)^k \cdot 4 \equiv 1^k \cdot 4 \equiv 4$ より，$r = 4$

(iii)　$n = 3k+3$ のとき　$2^{3k+3} = (2^3)^{k+1} \equiv 1^{k+1} \equiv 1$ より，$r = 1$

(2)　$m = 101101101101101101_{(2)}$ を 10 進法で表し，$\bmod 7$ で記すと，

$$m = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^8 + 2^9 + 2^{11} + 2^{12} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{17}$$

$$\equiv 1+4+1+4+1+4+1+4+1+4+1+4 = 30 \equiv 2$$

したがって，m を 7 で割った余りは 2 である。

［解　説］

基本的な整数問題です。いろいろな記述方法が考えられますが，解答例では合同式を用いました。

25　　　　［京都大］

以下，mod3 で記すと，$9\equiv 0$ に注意して，

(i)　$n\equiv 0$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 0-0+0=0$

(ii)　$n\equiv 1$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 1-7+0=-6\equiv 0$

(iii)　$n\equiv 2$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 8-14+0=-6\equiv 0$

(i)～(iii)より，n^3-7n+9 はつねに 3 の倍数である。

すると，n^3-7n+9 が素数となるのは，$n^3-7n+9=3$ の場合だけであり，

$$n^3-7n+6=0,\ (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

以上より，求める整数 n は，$n=1,\ 2,\ -3$ である。

［解　説］

まず，n^3-7n+9 の因数分解を考えたところうまくいかなかったため，次の手は，$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \cdots$ として実験です。すると，すべて 3 の倍数になることがわかり……。

26　　　　［名古屋大・文］

(1)　整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，次の3つの場合に分けて調べる。

(i)　α，βがともに奇数のとき

α^2，$\alpha\beta$，β^2はすべて奇数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(ii)　αが偶数，βが奇数のとき

α^2，$\alpha\beta$は偶数，β^2は奇数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(iii)　αが奇数，βが偶数のとき

α^2は奇数，$\alpha\beta$，β^2は偶数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(i)～(iii)より，いずれの場合も$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(2)　条件より，奇数nに対して，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$ ………①

まず，(1)より，整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数となるので，①は成立しない。

これより，①を満たす整数α，βは，ともに偶数である。

しかし，α，βがともに偶数のとき，α^2，$\alpha\beta$，β^2はすべて 4 の倍数となり，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は4の倍数である。よって，①は成立しない。

以上より，①を満たす整数α，βは存在しない。

(3)　3次方程式$x^3-2018x+c=0$（cは実数）の解を，$x=\alpha$，β，γとおくと，

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \text{ ………②},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2018 \text{ ………③}$$

②より$\gamma=-(\alpha+\beta)$となり，③に代入すると，

$$\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2=-2018,\quad \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2018 \text{ ………④}$$

ここで，$2018=2\times1009$なので，(2)から④を満たす整数α，βは存在しない。

すなわち，α，β，γのうち整数となるのは1個以下である。

［解　説］

細かく誘導のついた整数問題です。方針に迷うことはないでしょう。

27 ［東北大・理］

(1) 整数a, bに対して，$3^a-2^b=1$……①より，$3^a=2^b+1$………②

すると，$3^a=2^b+1>1$となるので，$a\geqq 1$であり，このとき①より，

$$2^b=3^a-1\geqq 3^1-1=2$$

よって，$b\geqq 1$であり，a, bはともに正となる。

(2) $b>1$すなわち$b\geqq 2$のとき，2^bが 4 の倍数であることに着目して，以下，mod 4 で記述すると，②の右辺は$2^b+1\equiv 1$である。

ここで，kを自然数としてaを偶奇に分け，$9\equiv 1$に注意すると，

(i) $a=2k$のとき　$3^a=3^{2k}=9^k\equiv 1^k\equiv 1$

(ii) $a=2k-1$のとき　$3^a=3^{2(k-1)+1}=9^{k-1}\cdot 3\equiv 1^{k-1}\cdot 3\equiv 3$

(i)(ii)より，②が成り立つのは，aが偶数のときである。

(3) (1)より，a, bはともに自然数なので，

(i) $b=1$のとき　②より$3^a=2^1+1=3$となり，$a=1$である。

(ii) $b\geqq 2$のとき　(2)より$a=2k$となり，②より，

$$3^{2k}=2^b+1,\ (3^k-1)(3^k+1)=2^b\ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$(3^k+1)-(3^k-1)=2$であり，さらに2^bの約数が$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^b$であることに着目すると，③より，

$$3^k-1=2,\ 3^k+1=2^2$$

これより，$k=1$から$a=2$となり，また$2\cdot 2^2=2^b$から$b=3$である。

(i)(ii)より，$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (2,\ 3)$

［解 説］

整数問題に誘導がついているものの，それがアバウトなタイプです。そのため，方針を決めるのに試行錯誤が必要になります。

28　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・文］

(1)　初項 1，公差 6 である等差数列$\{a_n\}$について，$a_n = 1+6(n-1) = 6n-5$

また，初項 3，公差 4 である等差数列$\{b_m\}$について，$b_m = 3+4(m-1) = 4m-1$

ここで，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{c_k\}$とすると，$a_n = b_m$ から，

$$6n-5 = 4m-1,\ 3n-2m = 2 \cdots\cdots\text{①}$$

①を満たす 1 つの解が$(n,\ m) = (2,\ 2)$より，$3\times2-2\times2 = 2 \cdots\cdots$②

①②より，$3(n-2)-2(m-2) = 0$，$3(n-2) = 2(m-2)$

ここで，3 と 2 は互いに素なので，j を整数として，$n-2 = 2j$，$m-2 = 3j$ から，

$$n = 2j+2,\ m = 3j+2 \cdots\cdots\text{③}$$

ここで，$m \geqq 1$，$n \geqq 1$ より $j \geqq 0$ となるので，$k = j+1 \geqq 1$ とおくと，③より，

$$n = 2(k-1)+2 = 2k,\ m = 3(k-1)+2 = 3k-1$$

よって，$\{c_k\}$の一般項は，$c_k = a_{2k} = 12k-5$ である。

(2)　まず，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{d_l\}$とする。ここで，$c_k = a_{2k} = b_{3k-1}$ に注意して，$\{d_l\}$の d_3 以降を項数 4 のグループに分け，$c_1 = 7$ から 4 項を第 1 群，$c_2 = 19$ から 4 項を第 2 群，$c_3 = 31$ から 4 項を第 3 群，…と呼ぶ。

$$1,\ 3\,\Big|\,\underbrace{\underline{7},\ 11,\ 13,\ 15}_{\text{第 1 群}}\,\Big|\,\underbrace{\underline{19},\ 23,\ 25,\ 27}_{\text{第 2 群}}\,\Big|\,\underbrace{\underline{31},\ 35,\ 37,\ 39}_{\text{第 3 群}}\,\Big|\cdots\cdots$$

さて，d_{1000} が第 i 群に属するとすると，$2+4(i-1) < 1000 \leqq 2+4i$ から，$i = 250$ となり，第 250 群に属する。

さらに，$1000-(2+4\times249) = 2$ から，第 250 群の 2 項目となるので，

$$d_{1000} = c_{250}+4 = (12\times250-5)+4 = 2999$$

また，d_{1001} は第 250 群の 3 項目となるので，

$$d_{1000} = c_{250}+6 = (12\times250-5)+6 = 3001$$

［解　説］

2 つの等差数列の共通数列が題材です。(1)は頻出題ですが，(2)はあまり見かけません。解答例では，$\{c_k\}$に注目し，群数列の考え方を利用して記しました。

29　［東京大・理］

(1)　$a_n=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{P}_n}{(n!)^2}=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}$ に対して，$n\geqq 2$ のとき，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2\,n!}{(2n-1)!}=\frac{(2n+1)\cdot 2n}{n\cdot(n+1)n}=\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}=\frac{2n+1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$$

ここで，n と $2n+1$ の最大公約数を g_1，i と j を自然数とすると，

$n=g_1 i$，$2n+1=g_1 j$

すると，$1=g_1(j-2i)$ となり $g_1=1$，すなわち n と $2n+1$ は互いに素である。

また，$n+1$ と $2n+1$ の最大公約数を g_2，k と l を自然数とすると，

$n+1=g_2 k$，$2n+1=g_2 l$

すると，$1=g_2(2k-l)$ となり $g_2=1$，すなわち $n+1$ と $2n+1$ は互いに素である。

さらに，$n(n+1)$ が偶数であることより $\dfrac{n(n+1)}{2}$ は自然数となり，また $\dfrac{n(n+1)}{2}$ と $2n+1$ は互いに素なので，既約分数を用いて $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{q_n}{p_n}$ と表したとき，

$$p_n=\frac{n(n+1)}{2},\quad q_n=2n+1$$

(2)　まず，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$ とすると，$2(2n+1)<n(n+1)$ から，$n^2-3n-2>0$

$n\geqq 2$ より $n>\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ となり，n は 4 以上の整数となる。

これより，$n\geqq 4$ のとき $a_n<a_{n-1}$ となり，$a_3>a_4>a_5>\cdots>0$ であり，

$$a_1=\frac{{}_3\mathrm{P}_1}{(1!)^2}=3,\quad a_2=\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{(2!)^2}=5,\quad a_3=\frac{{}_7\mathrm{P}_3}{(3!)^2}=\frac{35}{6},\quad a_4=\frac{{}_9\mathrm{P}_4}{(4!)^2}=\frac{21}{4}$$

$$a_5=\frac{{}_{11}\mathrm{P}_5}{(5!)^2}=\frac{77}{20},\quad a_6=\frac{{}_{13}\mathrm{P}_6}{(6!)^2}=\frac{143}{60},\quad a_7=\frac{{}_{15}\mathrm{P}_7}{(7!)^2}=\frac{143}{112}$$

$$a_8=\frac{{}_{17}\mathrm{P}_8}{(8!)^2}=\frac{2413}{4032}<1$$

よって，$1>a_8>a_9>\cdots>0$ となるので，a_n が整数となるのは $n=1,\ 2$ である。

［解　説］

二項係数を題材にした数列の問題です。誘導の丁寧な類題が文系で出ており，それに引きずられた解法です。数値計算は少し面倒でした。漸化式を利用してもよかったのですが。