$\boxed{12}$ ［千葉大・理］

正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$を満たす点 P がある。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$とするとき，$x, y$ をαを用いて表せ。

(2)　点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた x, y の和$x+y$の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。

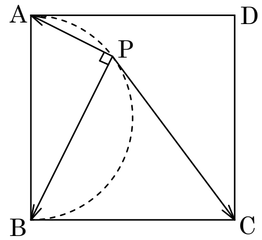
$\boxed{13}$ ［京都大］

四面体 ABCD は $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

$\boxed{12}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・理］



(1)　正方形 ABCD の内部の点 P は，$PA \perp PB$ を満たすので，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}$ より，$|\overrightarrow{PB}|=\alpha|\overrightarrow{PA}| \cdots\cdots\cdots ②$

さて，$\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}$ から，

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}=x\overrightarrow{PA}+(y-1)\overrightarrow{PB}$$

まず，$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}|$ より $|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|=|x\overrightarrow{PA}+(y-1)\overrightarrow{PB}|$ となり，①②から，

$$|\overrightarrow{PA}|^2+\alpha^2|\overrightarrow{PA}|^2=x^2|\overrightarrow{PA}|^2+\alpha^2(y-1)^2|\overrightarrow{PA}|^2$$

$$1+\alpha^2=x^2+\alpha^2(y-1)^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

また，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ から $(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})\cdot\{x\overrightarrow{PA}+(y-1)\overrightarrow{PB}\}=0$ となり，①②から，

$$x|\overrightarrow{PA}|^2-\alpha^2(y-1)|\overrightarrow{PA}|^2=0,\ x-\alpha^2(y-1)=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

さらに，直線 PB に関して，点 A と点 C は反対側にあるので，$x<0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

③④より，$1+\alpha^2=\alpha^4(y-1)^2+\alpha^2(y-1)^2$ となり，$\alpha^2(y-1)^2=1$

$$y-1=\pm\frac{1}{\alpha},\ x=\pm\alpha\ （複号同順）$$

すると，⑤より，$x=-\alpha$，$y=1-\dfrac{1}{\alpha}$

(2)　(1)より，$x+y=-\alpha+1-\dfrac{1}{\alpha}=1-\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ となる。

ここで，$\alpha>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geqq 2$ となり，

$$x+y\leqq 1-2=-1$$

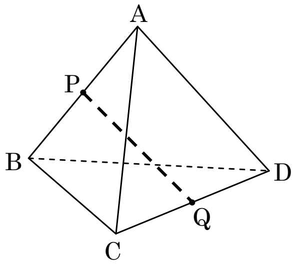
等号成立は，$\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$ すなわち $\alpha=1$ のときである。

以上より，$x+y$ の最大値は -1 であり，このとき，②から $|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}|$ となり，点 P は正方形 ABCD の対角線の交点に位置する。

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。対象が正方形なので，座標の設定という方法も考えられますが，ここでは①②を利用して x，y の連立方程式を立てるという方針で記しました。

13 ［京都大］



(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおく。

まず，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$ より，$|\vec{c}|=|\vec{d}-\vec{b}|$ となり，

$$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$ より，$|\vec{d}|=|\vec{c}-\vec{b}|$ となり，

$$|\vec{d}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2$ となり，

$$|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}\cdots\cdots\cdots③$$

さて，点 P，点 Q は，それぞれ辺 AB，辺 CD の中点なので，

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

ここで，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(-|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d})$

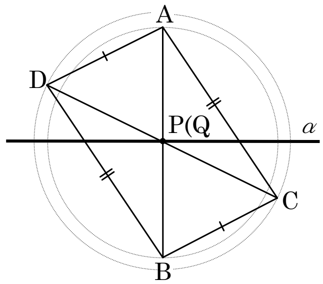
すると，③から $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ となるので，$PQ\perp AB$ である。

(2)　①③より，$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$ となり，

$$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(-\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2)$

すると，④から $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ となるので，$PQ\perp CD$ である。



これより，線分 PQ を軸として四面体 ABCD を 180° 回転すると，頂点 A は B，頂点 B は A，頂点 C は D，頂点 D は C に一致する。すなわち，四面体 ABCD は線分 PQ を軸とした回転対称になっている。

よって，線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を 2 つの部分に分けたとき，線分 PQ を軸として，その一方を 180° 回転すると，もう一方に重なる。言い換えると，α によって分けられた 2 つの部分の体積は等しい。

［解　説］

立体の性質に関する問題です。(1)はオーソドックスにベクトルを利用した解で記しました。(2)では，(1)と同様に考えると，$PQ\perp CD$ になることが推測できます。それを示した後，半直線 QP 上に視点をもってくると上図のようになり，回転対称という構図が見えてきます。