14　　　　［東京医歯大］

関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ について，以下の各問いに答えよ。ここで log は自然対数を表す。また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。

(1)　p を実数とするとき，$f(x)=p$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

以下，$f(x)$ の定義域を $x\geqq 0$ に制限した関数の逆関数を $g(x)$ とする。

(2)　u を正の実数とする。$p\geqq 0$ のとき，

$$p\leqq g(p)\leqq\frac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$$

を示せ。

(3)　p を正の実数とし，xy 平面において，曲線 $y=g(x)$ と直線 $x=p$ の交点を通り，直線 $y=x$ に平行な直線を l とする。また，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形の面積を S とする。このとき，S を p を用いて表せ。

15 ［大阪大］

2 つの関数 $f(t)=2\sin t+\cos 2t$，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C: x=f(t),\ y=g(t)\ \left(0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1) t が $0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

(2) t_1，t_2 を $0\leqq t_1<t_2\leqq \frac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1)=f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つことを示せ。

(3) C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。

$\boxed{16}$ ［神戸大］

座標空間において，O を原点とし，A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 0)$とする。△OAB を直線 OC のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OC 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$と$\overrightarrow{\mathrm{HP}}$を x, y, z の式で表せ。

(2) P$(x,\ y,\ z)$が L 上の点であるための条件は，$z^2 \leqq 2xy$ かつ $0 \leqq x+y \leqq 2$ であることを示せ。

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする。L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y,\ z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ。

$\boxed{17}$ ［東北大］

xy 平面内の図形

$$S:\begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

(1) S を xy 平面に図示せよ。

(2) V を求めよ。

14　　　　［東京医歯大］

(1)　関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ に対して,

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

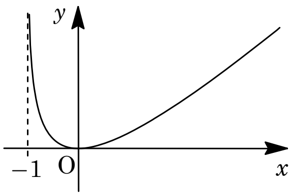
すると, $f(x)$ の増減は右表のようになり,

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\{x-\log(1+x)\}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\left\{1-\frac{\log(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x}\right\}=\infty$$

これより, $y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになり, $f(x)=p$ を満たす実数 x の個数は, $p<0$ のとき 0 個, $p=0$ のとき 1 個, $p>0$ のとき 2 個である。



(2)　(1)より, $y=f(x)$ に対し, $x\geqq 0$ のとき y は $y\geqq 0$ で単調に増加する。このとき, $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

さて, $p\geqq 0$, $q\geqq 0$ として, $g(p)=q$ とおくと, $p=f(q)$ であり,

$$g(p)-p=q-f(q)=q-\{q-\log(1+q)\}=\log(1+q)\geqq 0$$

よって, $p\leqq g(p)$ ………①

また, $u>0$ として, $F=\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u-g(p)$ と設定すると, $f(u)=u-\log(1+u)$, $f'(u)=\dfrac{u}{1+u}$ であることより,

$$F=\frac{1}{f'(u)}\{f(q)-f(u)\}+u-q$$

(i)　$q=u$ のとき　$F=\dfrac{1}{f'(u)}\{f(u)-f(u)\}+u-u=0$

(ii)　$q>u$ のとき　平均値の定理より, $\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}=f'(c)$　$(u<c<q)$

ここで, $x>0$ で, $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$ は正で単調増加より, $f'(c)>f'(u)$ となり,

$$\frac{f(q)-f(u)}{q-u}>f'(u),\quad \frac{f(q)-f(u)}{f'(u)}>q-u$$

よって, $F>(q-u)+u-q=0$ である。

(iii)　$q<u$ のとき　(ii)と同様にして, $\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}=f'(c)$　$(q<c<u)$

そして, $f'(c)<f'(u)$ から $\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}<f'(u)$ となり, $\dfrac{f(q)-f(u)}{f'(u)}>q-u$

よって, $F>(q-u)+u-q=0$ である。

(i)〜(iii)より, $F\geqq 0$ となり, $g(p)\leqq\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$ ………②

①②より, $p\leqq g(p)\leqq\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$

© 電送数学舎 2018

(3)　$p>0$ として，曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(p,\ g(p))$ を通り，傾きが 1 の直線 l の方程式は，$q=g(p)$ とおくと，

$$y-q=x-p\ ,\ \ y=x-p+q$$

そして，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形 D の面積を S とする。

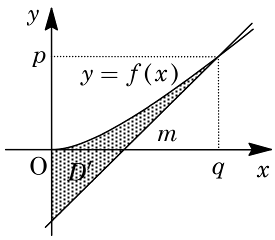
さて，$y=g(x)\Leftrightarrow x=f(y)$，$y=x-p+q\Leftrightarrow x=y+p-q$ に注意して，図形 D を直線 $y=x$ に関して対称移動する。

すると，図形 D は直線 $m: y=x+p-q$ と y 軸および曲線 $y=f(x)$ によって囲まれた図形に移り，この図形を D' とすると D' の面積も S である。

そこで，曲線 $y=f(x)$ と m の位置関係を考えると，$0\leqq x\leqq q$ で，

$$f(x)-(x+p-q)=f(x)-x-f(q)+q=-\log(1+x)+\log(1+q)\geqq 0$$

これより，図形 D' および図形 D は右図のようになり，



$$S=\int_0^q\{x-\log(1+x)-(x+p-q)\}dx$$

$$=\int_0^q\{-\log(1+x)-p+q\}dx$$

$$=-\big[(1+x)\log(1+x)\big]_0^q+\int_0^q dx-(p-q)q$$

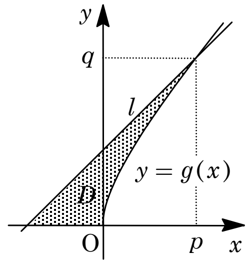
$$=-(1+q)\log(1+q)+q-(p-q)q$$

ここで，$p=f(q)$ より，$p=q-\log(1+q)$ となり，

$$S=-(1+q)(q-p)+q-(p-q)q$$

$$=-q+p-q(q-p)+q-(p-q)q$$

$$=p$$



［解　説］

逆関数の絡んだ微積分の総合問題です。盛りだくさんです。なお，(2)では，式の形から平均値の定理を利用しましたが，普通に微分しても構いません。また，(3)で l と曲線 $y=g(x)$ の位置関係について，(2)の不等式を利用することもできますが……。

© 電送数学舎 2018

15　　　　［大阪大］

(1)　まず，$f(t)=2\sin t+\cos 2t$ に対して，

$$f'(t)=2\cos t-2\sin 2t$$
$$=2\cos t-4\sin t\cos t$$
$$=2\cos t(1-2\sin t)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

これより，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)$ は $t=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。

また，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ に対して，

$$g'(t)=-2\sin t+2\cos 2t$$
$$=-2\sin t+2(1-2\sin^2 t)$$
$$=-2(2\sin^2 t+\sin t-1)$$
$$=-2(2\sin t-1)(\sin t+1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	0

これより，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ における $g(t)$ の増減は右表のようになり，$g(t)$ は $t=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ をとる。

(2)　$0\leqq t_1<t_2\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $f(t_1)=f(t_2)$ より，$2\sin t_1+\cos 2t_1=2\sin t_2+\cos 2t_2$

$$2\sin t_1+1-2\sin^2 t_1=2\sin t_2+1-2\sin^2 t_2$$

$$\sin t_2-\sin t_1-\sin^2 t_2+\sin^2 t_1=0,\ (\sin t_2-\sin t_1)(1-\sin t_2-\sin t_1)=0$$

すると，$\sin t_2-\sin t_1>0$ から，$\sin t_1+\sin t_2=1\cdots\cdots\cdots$①

さて，$g(t)^2=(2\cos t+\sin 2t)^2$ について，

$$g(t)^2=4\cos^2 t(1+\sin t)^2=4(1-\sin^2 t)(1+\sin t)^2=4(1-\sin t)(1+\sin t)^3$$

ここで，$u=\sin t$ とおき，$h(u)=(1-u)(1+u)^3\ (0\leqq u\leqq 1)$ と設定すると，

$$g(t)^2=4h(u)\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$u_1=\sin t_1$，$u_2=\sin t_2$ とおくと，$0\leqq u_1<u_2\leqq 1$ となり，②から，

$$g(t_1)^2=4h(u_1),\ g(t_2)^2=4h(u_2)$$

また，①から，$u_1+u_2=1\cdots\cdots\cdots$③

③から，$h(u_1)=(1-u_1)(1+u_1)^3=u_2(1+u_1)^3$，$h(u_2)=u_1(1+u_2)^3$ となり，

$$h(u_1)-h(u_2)=u_2(1+u_1)^3-u_1(1+u_2)^3$$
$$=(u_2-u_1)+3u_1u_2(u_1-u_2)+u_1u_2(u_1^2-u_2^2)$$
$$=(u_2-u_1)\{1-3u_1u_2-u_1u_2(u_1+u_2)\}=(u_2-u_1)(1-4u_1u_2)$$

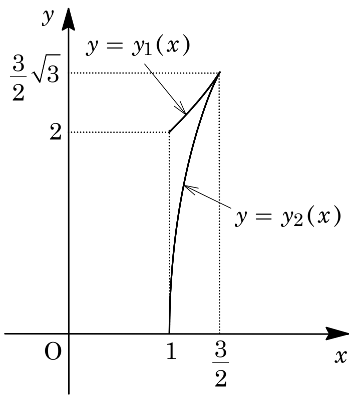
ここで，③および $u_1<u_2$ に注意すると，相加平均と相乗平均の関係から，

$$1=u_1+u_2>2\sqrt{u_1u_2},\ 4u_1u_2<1$$

よって，$h(u_1)-h(u_2)>0$ となり，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ である。

© 電送数学舎 2018

(3)　曲線 $C: x=f(t)$，$y=g(t)\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の概形は，(1)(2) から，右図のようになる。ここで，C の $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$ の部分を $y=y_1(x)$，$\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分を $y=y_2(x)$ とおくと，C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S は，



$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}\{y_1(x)-y_2(x)\}dx$$
$$=\int_1^{\frac{3}{2}}y_1(x)dx-\int_1^{\frac{3}{2}}y_2(x)dx$$

ここで，変数を x から t に置き換えると，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}g(t)f'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)f'(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t+\sin 2t)(2\cos t-2\sin 2t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2 t-2\sin 2t\cos t-2\sin^2 2t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+2\cos 2t-\sin 3t-\sin t-1+\cos 4t)dt$$
$$=\left[t+\frac{1}{3}\cos 3t+\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}(-1)+(-1)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$$

［解　説］

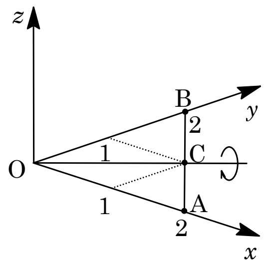
パラメータ曲線と面積についての問題です。曲線 C の概形を書くために，(2)にかなりのボリュームのある問題が設定されています。

© 電送数学舎 2018

16　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1)　点 H は直線 OC 上の点なので，t を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t(1,\ 1,\ 0) = (t,\ t,\ 0)$$



また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y,\ z)$ より，

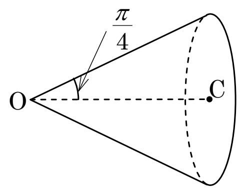
$$\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = (x-t,\ y-t,\ z)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{HP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{HP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ となり，

$$(x-t)+(y-t)=0$$

よって，$t = \dfrac{x+y}{2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x+y}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \left(\dfrac{x-y}{2},\ \dfrac{-x+y}{2},\ z\right)$

(2)　$\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{BOC} = \dfrac{\pi}{4}$ から，回転体 L は，線分 OC を中心軸とし，母線と中心軸のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ の直円錐（内部を含む）を表す。そして，点 P が L 上の点であるための条件は，



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} \geqq |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\frac{\pi}{4} \cdots\cdots\cdots ①$$

$$0 \leqq x+y \leqq 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

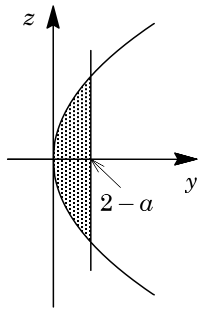
①より，$x+y \geqq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$(x+y)^2 \geqq x^2+y^2+z^2$

$$z^2 \leqq 2xy \cdots\cdots\cdots ③$$

よって，②③より，$z^2 \leqq 2xy$ かつ $0 \leqq x+y \leqq 2$ である。

(3)　L を平面 $x=a\ (1 \leqq a \leqq 2)$ で切った切り口は，③より，

$$z^2 \leqq 2ay \cdots\cdots\cdots ④$$



②より $0 \leqq a+y \leqq 2$ から，$-a \leqq y \leqq 2-a \cdots\cdots\cdots ⑤$

そして，④⑤を平面 $x=a$ 上に図示すると右図の網点部になり，その面積を $S(a)$ とおくと，y 軸に関する対称性から，

$$S(a) = 2\int_0^{2-a} \sqrt{2ay}\,dy = 2\sqrt{2a}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2-a}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2a}(2-a)\sqrt{2-a} = \frac{4}{3}\sqrt{2}(2-a)\sqrt{a(2-a)}$$

(4)　立体 $\{(x,\ y,\ z) \mid (x,\ y,\ z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を V とすると，

$$V = \int_1^2 S(a)da = \frac{4}{3}\sqrt{2}\int_1^2 (2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$$

ここで，$I = \displaystyle\int_1^2 (2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$ とおくと，

$$I = \int_1^2 (2-a)\sqrt{2a-a^2}\,da = \int_1^2 (2-a)\sqrt{-(a-1)^2+1}\,da$$

さらに，$s = a-1$ とおくと，$ds = da$ となり，

© 電送数学舎 2018

$$I=\int_0^1(1-s)\sqrt{1-s^2}\,ds=\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds-\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds$$

そして，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}$，また$u=1-s^2$とおくと$du=-2sds$から，

$$\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds=-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Big[\,u^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

したがって，$I=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$となるので，$V=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi-\dfrac{4}{9}\sqrt{2}$である。

［解 説］

立体の体積を求める問題です。たいへん詳しい誘導がついています。なお，回転体Lが直円錐であることは明らかなので，(2)では(1)の誘導を利用しませんでした。立式の詳細は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。また，(3)では，この円錐を母線に平行に切っていますので，放物線が出現しています。

© 電送数学舎 2018

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　条件より，$S: x+y^2 \leqq 2$ ……①，$x+y \geqq 0$ ……②，$x-y \leqq 2$ ……③

まず，①と②の境界線の交点は，$x+y^2=2$ かつ $x+y=0$ から，

$$y^2-y=2,\ (y-2)(y+1)=0$$

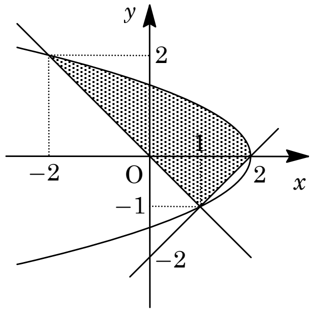
よって，$(x,\ y)=(-2,\ 2),\ (1,\ -1)$

また，①と③の境界線の交点は，$x+y^2=2$ かつ $x-y=2$ から，

$$y^2+y=0,\ y(y+1)=0$$

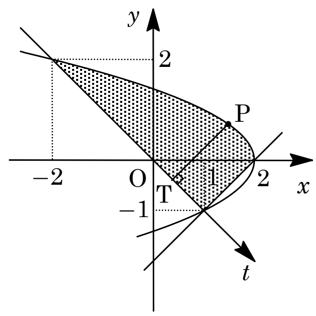
よって，$(x,\ y)=(2,\ 0),\ (1,\ -1)$

以上より，図形 S は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　①の境界線上に点 $\mathrm{P}(-y^2+2,\ y)$ $(0 \leqq y \leqq 2)$ をとり，P から直線 $y=-x$ に垂線を下ろし，その足を T とおく。

そして，右図のように t 軸を設定し，$\mathrm{OT}=|t|$ とすると，$\mathrm{T}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ と表せる。



さて，P と直線 $y=-x$ すなわち $x+y=0$ との距離は，

$$\mathrm{PT}=\frac{|-y^2+2+y|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|-y^2+y+2|$$

ここで，$0 \leqq y \leqq 2$ において，$-y^2+y+2=-(y+1)(y-2) \geqq 0$ から，

$$\mathrm{PT}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2+y+2) \cdots\cdots\text{④}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ の単位ベクトルの成分は，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ -1)$ とおけるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PT}}=(-y^2+2,\ y)+\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2+y+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ -1)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y+1,\ \frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y-1\right)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ から，$\dfrac{t}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}y+1$ となり，

$$t=-\frac{1}{\sqrt{2}}y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2-y+2) \cdots\cdots\text{⑤}$$

さて，図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{PT}^2\,dt$$

ここで，変数を t から y に置換すると，⑤より，$t=-2\sqrt{2} \to \sqrt{2}$ のとき $y=2 \to 0$ となり，また $dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-2y-1)\,dy$ から，

© 電送数学舎 2018

$$V=\pi\int_2^0\frac{1}{2}(-y^2+y+2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-2y-1)\,dy$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2(-y^2+y+2)^2(2y+1)\,dy$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2(2y^5-3y^4-8y^3+5y^2+12y+4)\,dy$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Big[\frac{1}{3}y^6-\frac{3}{5}y^5-2y^4+\frac{5}{3}y^3+6y^2+4y\Big]_0^2$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Big(\frac{64}{3}-\frac{96}{5}-32+\frac{40}{3}+24+8\Big)=\frac{58}{15}\sqrt{2}\pi$$

［解　説］

斜回転体の体積を求める問題です。計算量に配慮した設定となっていますが，それでも最後の定積分は面倒です。

© 電送数学舎 2018