13　　［千葉大］

複素数 $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ に対し，$\alpha=z+z^8$ とおく。$f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で，3 次の係数が 1 であり，かつ $f(\alpha)=0$ となるものとする。ただし，すべての係数が整数である多項式を，整数係数の多項式という。

(1)　$f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。

(2)　3 次方程式 $f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解を，α の 2 次以下の，整数係数の多項式の形で表せ。

$\boxed{14}$ ［九州大］

α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

$\boxed{15}$ ［北海道大］

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

(1) D を複素数平面上に図示せよ。

(2) k を実数とする。D に属する z で方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$ を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし，i は虚数単位を表す。

16　　［東北大］

α を複素数とする。複素数 z の方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ ……①について，以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。

(1)　方程式①が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

(2)　方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

複素数平面上で$|z+i|-|z-i|=1$を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角θの範囲は$0\leqq\theta<2\pi$とする。

(1)　Hの点zに対して，zの偏角θ_1のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　H の点 z に対して$w=\dfrac{1}{z}$とする。w の絶対値r_2と偏角θ_2のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

18　　［筑波大］

複素数αに対して，複素数平面上の 3 点O(0)，A(α)，B(α^2)を考える。次の条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)をすべて満たす複素数α全体の集合をSとする。

(Ⅰ)　αは実数でも純虚数でもない。

(Ⅱ)　$|\alpha|>1$である。

(Ⅲ)　三角形OABは直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　αがSに属するとき，$\angle \mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$であることを示せ。

(2)　集合Sを複素数平面上に図示せよ。

(3)　x，yを$\alpha^2=x+yi$を満たす実数とする。αがSを動くとき，xy平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求め，図示せよ。

$\boxed{19}$ ［広島大］

複素数平面上の 4 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$, $\mathrm{D}(\delta)$ を頂点とする四角形 ABCD を考える。ただし, 四角形 ABCD は, すべての内角が 180° より小さい四角形（凸四角形）であるとする。また, 四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並んでいるとする。四角形 ABCD の外側に, 4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を表す複素数を求めよ。

(2) 四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は, 四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ。

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるならば, 四角形 PQRS は正方形であることを示せ。

13 ［千葉大］

(1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ のとき，$z^9=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z^8=\frac{1}{z}=\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)=\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}$$

すると，$\alpha=z+z^8=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$ となり，$\cos\dfrac{2\pi}{9}=\dfrac{\alpha}{2}$ ………①

ここで，3 倍角の公式より，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=4\cos^3\dfrac{2\pi}{9}-3\cos\dfrac{2\pi}{9}$ となるので，①より，

$$-\frac{1}{2}=4\cdot\frac{\alpha^3}{8}-3\cdot\frac{\alpha}{2},\ -1=\alpha^3-3\alpha,\ \alpha^3-3\alpha+1=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，α は $x^3-3x+1=0$ の解なので，$f(x)=x^3-3x+1$ となる。

(2) $f(x)$ を $x-\alpha$ で割ると，②から，$f(x)=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-3)$

すると，$f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解は，

$$x=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4(\alpha^2-3)}}{2}=\frac{-\alpha\pm\sqrt{12-3\alpha^2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，①から，$12-3\alpha^2=12-3\cdot 4\cos^2\dfrac{2\pi}{9}=12\sin^2\dfrac{2\pi}{9}$ となるので，③より，

$$x=-\cos\frac{2\pi}{9}\pm\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}=2\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi}{9}\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}\pm\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{9}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\mp\frac{2\pi}{9}\right)$$

よって，$x=2\cos\dfrac{4\pi}{9}$ または $x=2\cos\dfrac{8\pi}{9}$ となり，①②より，

$$2\cos\frac{4\pi}{9}=2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{9}-1\right)=4\cdot\frac{\alpha^2}{4}-2=\alpha^2-2$$
$$2\cos\frac{8\pi}{9}=2\left(2\cos^2\frac{4\pi}{9}-1\right)=(\alpha^2-2)^2-2=\alpha^4-4\alpha^2+2$$
$$=\alpha(3\alpha-1)-4\alpha^2+2=-\alpha^2-\alpha+2$$

以上より，$f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解は，α^2-2，$-\alpha^2-\alpha+2$ である。

［解 説］

複素数の極形式についての問題です。3 倍角の公式がポイントになりますが，問題文にその利用が暗示されています。また，解と係数の関係を併用すると，解答例が少し簡略になります。

$\boxed{14}$ ［九州大］

まず，与えられた等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ に対して，

$$-i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=\alpha(|z|^2+2)\cdots\cdots\cdots①$$

①の両辺に共役複素数をとると，$i(2|\alpha|^2+1)z=\overline{\alpha}(|z|^2+2)\cdots\cdots\cdots②$

①×②より，$(2|\alpha|^2+1)^2z\overline{z}=\alpha\overline{\alpha}(|z|^2+2)^2$ となり，

$$(2|\alpha|^2+1)^2|z|^2=|\alpha|^2(|z|^2+2)^2,\ (2|\alpha|^2+1)|z|=|\alpha|(|z|^2+2)$$

$|z|$ についてまとめると，$|\alpha||z|^2-(2|\alpha|^2+1)|z|+2|\alpha|=0\cdots\cdots\cdots③$

(i)　$|\alpha|=0$ $(\alpha=0)$ のとき　③より $|z|=0$ となり，$z=0$ である。

(ii)　$|\alpha|\neq 0$ $(\alpha\neq 0)$ のとき　③より $(|\alpha||z|-1)(|z|-2|\alpha|)=0$ となり，

$$|z|=\frac{1}{|\alpha|},\ |z|=2|\alpha|$$

(ii-i)　$|z|=\dfrac{1}{|\alpha|}$ のとき　$|z|^2+2=\dfrac{1}{|\alpha|^2}+2=\dfrac{1+2|\alpha|^2}{|\alpha|^2}$ となり，②より，

$$z=\frac{\overline{\alpha}(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{\overline{\alpha}}{i(2|\alpha|^2+1)}\cdot\frac{1+2|\alpha|^2}{|\alpha|^2}=\frac{1}{i\alpha}=-\frac{i}{\alpha}$$

(ii-ii)　$|z|=2|\alpha|$ のとき　$|z|^2+2=4|\alpha|^2+2=2(2|\alpha|^2+1)$ となり，②より，

$$z=\frac{\overline{\alpha}(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{2\overline{\alpha}(2|\alpha|^2+1)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{2\overline{\alpha}}{i}=-2i\overline{\alpha}$$

［解　説］

複素数の計算についての問題です。題意は，与えられた等式から z を求めるわけですが，上の解答例では，$z\overline{z}=|z|^2$ という関係式を用いて邪魔な $\overline{z}$ を消去するという方針を立て，$|z|$ についての方程式③を導いています。

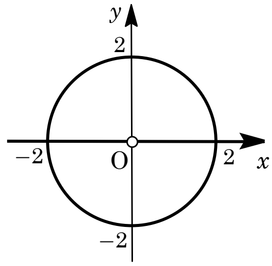
15　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大］

(1)　$z\neq 0$ のとき，$z+\dfrac{4}{z}$ が実数なので，$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}$ となり，

$$z\overline{z}(z-\overline{z})+4(\overline{z}-z)=0,\ (z-\overline{z})(z\overline{z}-4)=0$$

$$(z-\overline{z})(|z|^2-4)=0$$

よって，$z=\overline{z}$ または $|z|=2$ から，z は 0 でない実数または絶対値が 2 の複素数である。これを複素数平面上に図示すると，右図の太線部となる。ただし，原点は除く。



(2)　k を実数とし，方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$ ……①に対して，(1)から，

(i)　z が実数 $(z\neq 0)$ のとき

$k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)$ および $z-\dfrac{4}{z}$ は実数より，$z-\dfrac{4}{z}\neq 0$ のときは①が成立しない。

すると，$z-\dfrac{4}{z}=0$ から $z=\pm 2$ となり，このとき $k=0$ である。

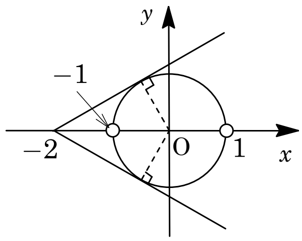
(ii)　z が $|z|=2$ を満たす虚数のとき

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(\sin\theta\neq 0)$ と表せ，$\dfrac{4}{z}=2(\cos\theta-i\sin\theta)$ から，

$$z+\frac{4}{z}=4\cos\theta,\ z-\frac{4}{z}=4i\sin\theta$$

①に代入すると，$k(4\cos\theta+8)=-4\sin\theta$，$k=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+2}$ ………②

②から，$-k=\dfrac{\sin\theta-0}{\cos\theta-(-2)}$ と表せ，$-k$ は原点が中心の単位円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $(-2,\ 0)$ を結ぶ線分の傾きとなる。



そこで，$\sin\theta\neq 0$ に注意し，右図の円の接線と x 軸のなす角が $\pm 30°$ から，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq -k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $(k\neq 0)$ となり，

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}\quad (k\neq 0)$$

(i)(ii)より，①が成り立つ k の値の範囲は，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

［解　説］

複素数についての総合的な問題です。(1)では「z が実数 $\Leftrightarrow$ $z=\overline{z}$」に着目して数式処理をしています。また，(2)は①式の形から極形式を設定しました。なお，後半は微分法の利用でも構いませんが，上記の線分の傾きを対応させる方法も有名です。

$\boxed{16}$　　［東北大］

(1)　複素数αに対し，複素数 z の方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ ……①について，$z=0$ では成立しないことより $z\neq 0$ となり，①より，

$$\alpha=\frac{z^2+2i}{z}=z+\frac{2i}{z}\ \cdots\cdots\text{②}$$

さて，方程式①が実数解をもつとき，t を実数として $z=t$ を②に代入すると，

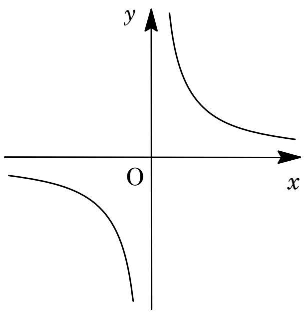
$$\alpha=t+\frac{2}{t}i\ \cdots\cdots\text{③}$$

ここで，$\alpha=x+yi$ とおくと，③より，

$$x=t,\ \ y=\frac{2}{t}$$

これより，点αは複素数平面上で双曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ を描く。

図示すると，右図のようになる。



(2)　方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつとき，θを実数として，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{1}{z}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$

②に代入すると，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta+2i(\cos\theta-i\sin\theta)$ から，

$$\alpha=(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\ \cdots\cdots\text{④}$$

さて，点αを原点を中心に$\dfrac{\pi}{4}$回転させた点βは，

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\alpha\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

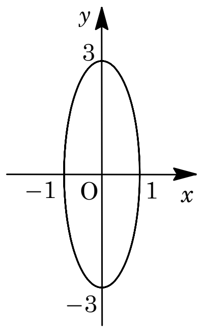
④⑤より，$\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\{(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\}$ となり，

$$\begin{aligned}\beta&=\frac{\sqrt{2}}{2}\{(-\cos\theta+\sin\theta)+3i(\sin\theta+\cos\theta)\}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\&=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\ \cdots\cdots\text{⑥}\end{aligned}$$

ここで，$\beta=x+yi$ とおくと，⑥より，

$$x=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\ \ y=3\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

これより，点βは複素数平面上で楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ を描く。図示すると，右図のようになる。



［解　説］

複素数平面上の軌跡に関する問題です。点αや点βの軌跡を求めるので，与えられた①ではなく，変形した②をもとに計算を進めています。

$\boxed{17}$ ［熊本大］

(1) 複素数平面上で，$\mathrm{A}(i)$，$\mathrm{B}(-i)$，$\mathrm{P}(z)$ とおくと，$|z+i|-|z-i|=1$ より，

$$\mathrm{BP}-\mathrm{AP}=1$$

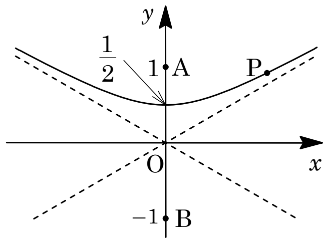
すると，点 P の描く図形 H は 2 点 A, B を焦点とする双曲線である。

ここで，$z=x+yi$ とおき，$H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ とすると，$c=1$ かつ $2b=1$ で，

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これより，$H:\dfrac{4x^2}{3}-4y^2=-1$ となり，漸近線は，

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$$



ただし，$\mathrm{BP}>\mathrm{AP}$ より $y>0$ であり，図形 H を図示すると右図の曲線となる。

そして，2 本の漸近線と実軸の正の向きとのなす角が $\pm\dfrac{\pi}{6}$ より，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は，$0\leqq\theta_1<2\pi$ で考えると，$\dfrac{\pi}{6}<\theta_1<\dfrac{5}{6}\pi$ である。

(2) $w=\dfrac{1}{z}$ のとき，$r_2=|w|=\dfrac{1}{|z|}$ となり，(1)より $|z|\geqq\dfrac{1}{2}$ なので $0<r_2\leqq 2$ である。

また，n を整数として，$\theta_2=\arg w=\arg\dfrac{1}{z}=2n\pi-\arg z=2n\pi-\theta_1$ より，

$$2n\pi-\frac{5}{6}\pi<\theta_2<2n\pi-\frac{\pi}{6}$$

$0\leqq\theta_2<2\pi$ より $n=1$ として，$\dfrac{7}{6}\pi<\theta_2<\dfrac{11}{6}\pi$ である。

［解　説］

双曲線の絡んだ複素数と図形の基本的な問題です。(1)は，x と y を用いて絶対値の計算を行っても構いません。

18　［筑波大］

(1)　3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha^2)$ に対して，$\triangle\mathrm{OAB}$ は直角三角形より，

(a)　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\arg\alpha=\theta$ とおくと $\arg\alpha^2=2\theta$ となり，n を整数として，

$$2\theta-\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

ところが，これは α が純虚数でないことに反する。

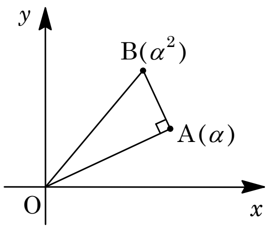
(b)　$\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　辺 OA が斜辺となるので，$\mathrm{OA}>\mathrm{OB}$ となり，

$$|\alpha|>|\alpha^2|=|\alpha|^2,\ 1>|\alpha|$$

ところが，これは $|\alpha|>1$ に反する。

(a)(b)より，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ である。

(2)　$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{OB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{AB}^2$ となり，



$$|\alpha^2|^2=|\alpha|^2+|\alpha^2-\alpha|^2$$

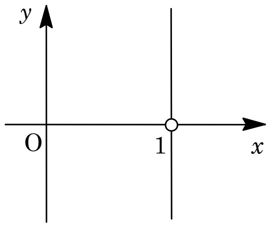
すると，$\alpha^2\overline{\alpha^2}=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha^2-\alpha)(\overline{\alpha^2-\alpha})$ から，

$$\alpha^2(\overline{\alpha})^2=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha^2-\alpha)\{(\overline{\alpha})^2-\overline{\alpha}\}$$
$$=\alpha\overline{\alpha}+\alpha^2(\overline{\alpha})^2-\alpha^2\overline{\alpha}-\alpha(\overline{\alpha})^2+\alpha\overline{\alpha}$$

これより，$2\alpha\overline{\alpha}-\alpha^2\overline{\alpha}-\alpha(\overline{\alpha})^2=0$ となり，

$$\alpha\overline{\alpha}(2-\alpha-\overline{\alpha})=0$$

$\alpha\overline{\alpha}>0$ より，$2-\alpha-\overline{\alpha}=0$ となり，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=1$



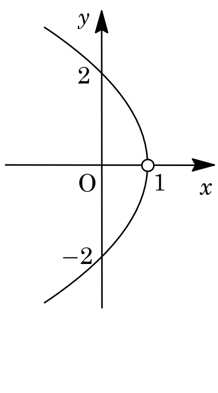
よって，α の実部は 1 となるので，α 全体を図示すると右図の直線である。ただし，$\alpha=1$ は除く。

(3)　(2)より，0 でない実数 k をとり，$\alpha=1+ki$ とおくと，

$$\alpha^2=(1+ki)^2=1-k^2+2ki\ (k\neq 0)$$

ここで，$\alpha^2=x+yi$ なので，$x=1-k^2$，$y=2k$ となり，

$$x=1-\frac{y^2}{4}\quad(y\neq 0)$$

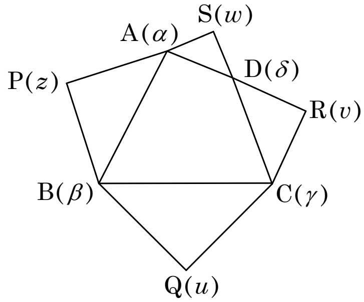


よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡を図示すると，右図の放物線となる。ただし，点 $(1,\ 0)$ は除く。

［解　説］

複素数と図形についての標準的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，解答例では三平方の定理を利用しました。

$\boxed{19}$ **［広島大］**



(1)　複素数平面上で，A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)を頂点とする四角形 ABCD に対し，その外側に 4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。このとき，P(z)，Q(u)，R(v)，S(w)とおく。

すると，P は B を中心に A を$\dfrac{\pi}{4}$回転し，距離を$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$倍したものとなり，

$$z-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big)(\alpha-\beta)=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta)$$

よって，$z=\dfrac{1+i}{2}\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta$である。

(2)　(1)と同様にして，$u=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma$，$v=\dfrac{1+i}{2}\gamma+\dfrac{1-i}{2}\delta$，$w=\dfrac{1+i}{2}\delta+\dfrac{1-i}{2}\alpha$

さて，四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，

$$\frac{z+v}{2}=\frac{u+w}{2},\ z+v=u+w$$

すると，$\dfrac{1+i}{2}\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1+i}{2}\gamma+\dfrac{1-i}{2}\delta=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma+\dfrac{1+i}{2}\delta+\dfrac{1-i}{2}\alpha$

$$i\alpha-i\beta+i\gamma-i\delta=0,\ \alpha+\gamma=\beta+\delta\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{\beta+\delta}{2}$となり，四角形 ABCD は平行四辺形である。

(3)　四角形 PQRS が平行四辺形であるとき，$(*)$より$\delta=\alpha-\beta+\gamma$となり，

$$\begin{aligned}w-z&=\frac{1+i}{2}\delta+\frac{1-i}{2}\alpha-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta\\&=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta+\gamma)+\frac{1-i}{2}\alpha-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta=\frac{1-i}{2}\alpha-\beta+\frac{1+i}{2}\gamma\end{aligned}$$

また，$u-z=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma-\dfrac{1+i}{2}\alpha-\dfrac{1-i}{2}\beta=-\dfrac{1+i}{2}\alpha+i\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma$から，

$$i(u-z)=-\frac{i+i^2}{2}\alpha+i^2\beta+\frac{i-i^2}{2}\gamma=\frac{1-i}{2}\alpha-\beta+\frac{1+i}{2}\gamma$$

よって，$w-z=i(u-z)$となり，すなわち S は P を中心に Q を$\dfrac{\pi}{2}$回転したものとなるので，$\mathrm{PS}=\mathrm{PQ}$かつ$\angle\mathrm{QPS}=\dfrac{\pi}{2}$より四角形 PQRS は正方形である。

［解　説］

複素数と図形に関する頻出問題です。なお，(2)の平行四辺形については，「2 本の対角線が互いに他を二等分する」という条件を利用しています。