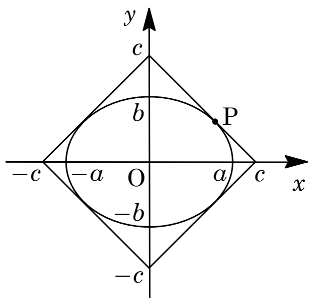
4　　[金沢大]

$a,\ b,\ c$ を正の数とする。楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が，4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の各辺に接しているとする。4 つの接点を頂点とする四角形の面積を S，楕円 C で囲まれる図形の面積を T とする。このとき，不等式 $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大］



楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の第 1 象限の接点 P の座標を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，接線の方程式は,

$$\frac{a\cos\theta}{a^2}x+\frac{b\sin\theta}{b^2}y=1,\quad \frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

この接線が，点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$ を通るので,

$$\frac{c\cos\theta}{a}=1\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{c\sin\theta}{b}=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\cos\theta=\dfrac{a}{c}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{c}$ となり，$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$，$a^2+b^2=c^2\ \cdots\cdots\cdots③$

このとき，第 1 象限の接点の座標は $\left(\dfrac{a^2}{c},\ \dfrac{b^2}{c}\right)$ となり，4 つの接点を結んでできる四角形は，対称性から長方形となるので，③を利用すると，その面積 S は,

$$S=4\cdot\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{c}=\frac{4a^2b^2}{c^2}=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

また，楕円 C で囲まれる図形の面積 T は,

$$T=\pi a^2\cdot\frac{b}{a}=\pi ab$$

このとき，$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{1}{\pi ab}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4ab}{\pi(a^2+b^2)}=\dfrac{2}{\pi}\left(1-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)\cdots\cdots\cdots④$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より,

$$a^2+b^2\geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab,\quad \frac{2ab}{a^2+b^2}\leqq 1\ \ (\text{等号は}\ a=b\ \text{のとき成立})\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}\geqq 0$，すなわち $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つ。

また，等号成立は，③も合わせると，$a=b=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$ のときである。

［解　説］

楕円を題材とした基本的な問題です。式変形を進めると，相加平均と相乗平均の関係を利用することが推測できます。もっとも，c と θ で処理する手もありますが。