13　　　　［名古屋大］

a を 1 より大きい実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y=x$ 上にあることを示せ。

(2)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。

(3)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。

14　［大阪大］

次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ の範囲で不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ が成り立つことを示せ。

(2)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大］

(1)　$a>1$ のとき，$y=a^x$ ……①と $y=\log_a x$ ……②のグラフが，共有点 $(p,\ q)$ をもつとすると，①②から，$p>0$，$q>0$ で，

$$q=a^p\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad q=\log_a p\ \cdots\cdots\cdots ④$$

④より，$p=a^q$ となり，③と合わせて，$\dfrac{q}{p}=a^{p-q}$ ………⑤

(i)　$p>q$ のとき　$0<\dfrac{q}{p}<1$ で $a^{p-q}>1$ より，⑤は成立しない。

(ii)　$p<q$ のとき　$\dfrac{q}{p}>1$ で $a^{p-q}<1$ より，⑤は成立しない。

(iii)　$p=q$ のとき　$\dfrac{q}{p}=1$ で $a^{p-q}=1$ より，⑤は成立する。

(i)～(iii)より，①と②のグラフが共有点をもつとき，それは直線 $y=x$ 上にある。

(2)　(1)より，①と②のグラフが共有点は，②と直線 $y=x$ の共有点なので，

$$x=\log_a x,\quad x=\frac{\log x}{\log a},\quad \log a=\frac{\log x}{x}\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

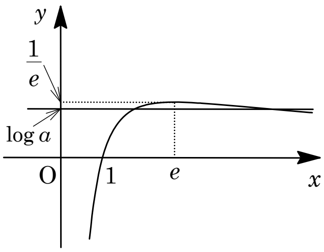
さて，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f(x)=\log a$ の解が①と②のグラフが共有点の x 座標に対応し，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになる。さらに，

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ から，$y=f(x)$ のグラフは右図の曲線である。



ここで，$a>1$ から $\log a>0$ に注意すると，⑥の解は 2 個以下，すなわち①と②のグラフの共有点は 2 個以下である。

(3)　①と②のグラフの共有点が 1 個であるとき，(2)より，$x=e$ となり，共有点の座標は $(e,\ e)$ である。また，このとき $\log a=\dfrac{1}{e}$ より，$a=e^{\frac{1}{e}}$ となる。

［解　説］

微分の方程式への応用問題です。(1)と(2)は，題意を考えると，グラフから明らかというわけにはいきません。また，(2)では $y=\log_a x$ と $y=x$ の組合せで処理しましたが，$y=a^x$ と $y=x$ を組合せでも構いません。対数は微分と相性良しと思い，前者を選択しただけですので。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1)　まず，$f(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}\ (x>0)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$$

これより，$f(x)>f(0)=0$ となり，$\log(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$ ………①

次に，$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)\ (x>0)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}\Big(\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}\Big)-\frac{1}{1+x}=\frac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{2+x-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{4+4x+x^2}-\sqrt{4+4x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}>0$$

これより，$g(x)>g(0)=0$ となり，$\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}>\log(1+x)$ ………②

①②から，$x>0$ で，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ ………③

(2)　$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ ……④に対して，

$$y'=-\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\frac{1}{x^2}=-\frac{x^2-(1+x)\{\log(1+x)\}^2}{x^2(1+x)\{\log(1+x)\}^2}$$

②より，$\dfrac{x^2}{1+x}>\{\log(1+x)\}^2$ すなわち $x^2>(1+x)\{\log(1+x)\}^2$ となり，$y'<0$ から，④は $x>0$ で単調に減少する。

ここで，$x\to\infty$ のとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\to 0$ である。

また，$0<x<2$ において，$x-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x(2-x)}{2}>0$ となるので，③から，

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{2}{x(2-x)},\quad \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{2-(2-x)}{x(2-x)}$$

すると，$x\to+0$ のとき，$\dfrac{2-(2-x)}{x(2-x)}=\dfrac{1}{2-x}\to\dfrac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\to\frac{1}{2}$$

よって，$x\to+0$ のとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\to\dfrac{1}{2}$ となる。

以上より，$x>0$ で，④のとり得る範囲は，$0<y<\dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

微分の応用と関数の極限に関する基本的な問題です。