$\boxed{8}$　　［広島大］

次の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 $t$ に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}dx$ の値を求めよ。

(3)　次の不等式を示せ。　$\displaystyle\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$

**9**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［長崎大］

積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，$0!=1$ と定める。また，関数 $y=t^0$ は，関数 $y=1$ を意味する。

(1)　部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ。同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ。

(2)　$F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ。その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ。さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(3)　$n\geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ。さらに，$n\geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(4)　$p(x)=x^n$ とおくとき, $k$ 次導関数 $p^{(k)}(x)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。そして,

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$p^{(0)}(x)=p(x)$ と定める。

$\boxed{10}$ ［名古屋大］

自然数 $n$ に対し，定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(2) $0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ。

(4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき(1), (2)を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{11}$ ［新潟大］

自然数 $n$ に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ を示せ。

(2)　$\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx\right| \leqq \dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$ の和を求めよ。

**8**　　　　［広島大］

(1)　$f(t)=e^t-1-t$ とおくと，$f'(t)=e^t-1$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，これより $f(t)\geqq 0$ であり，

$$1+t\leqq e^t \cdots\cdots\cdots ①$$

| $t$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(t)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$ とし，$u=\cos x$ とおくと $du=-\sin x\,dx$ から，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{u^2}du=1+\Big[-\frac{1}{u}\Big]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$$

(3)　①より，$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}$ となり，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\geqq\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots ②$$

また，①より $1+\sin x\leqq e^{\sin x}$ となり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で $e^{-\sin x}\leqq\dfrac{1}{1+\sin x}$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx\cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，(2)の結果を参照すると，②③から，

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$$

［解　説］

定積分と不等式についての問題です。(2)の結果が(3)へのざっくばらんな誘導となっています。なお，(2)の定積分の計算は頻出です。

**9** ［長崎大］

(1) $F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して，

$$F_2(x)=\int_0^x \frac{t^2}{2!}e^{-t}\,dt=-\Big[\frac{t^2}{2}e^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x te^{-t}\,dt=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x)$$

$$F_1(x)=\int_0^x \frac{t^1}{1!}e^{-t}\,dt=-\Big[te^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+F_0(x)$$

(2) $F_0(x)=\int_0^x e^{-t}\,dt=-\Big[e^{-t}\Big]_0^x=-(e^{-x}-1)=1-e^{-x}$

$$F_1(x)=-xe^{-x}+F_0(x)=-xe^{-x}+1-e^{-x}=1-(1+x)e^{-x}$$

$$F_2(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+1-(1+x)e^{-x}=1-\Big(1+x+\frac{x^2}{2}\Big)e^{-x}$$

(3) $F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt=-\Big[\frac{t^n}{n!}e^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+F_{n-1}(x)$

すると，$n\geqq 1$ で，$F_n(x)=F_0(x)+\sum_{k=1}^{n}\{F_k(x)-F_{k-1}(x)\}$ より，

$$F_n(x)=1-e^{-x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}=1-e^{-x}-e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}=1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

この式は $n=0$ のときも成立している。

(4) $p(x)=x^n$ のとき，$p'(x)=nx^{n-1}$，$p''(x)=n(n-1)x^{n-2}$ となり，

$$p'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}=\frac{n!}{(n-3)!}x^{n-3}$$

$$p^{(4)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}=\frac{n!}{(n-4)!}x^{n-4}$$

すると，帰納的に，$p^{(k)}(x)=\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ である。

さて，$n!F_n(x)=\int_0^x t^ne^{-t}\,dt$ より，(3)の結果を代入すると，

$$\int_0^x t^ne^{-t}\,dt=n!\Big(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\Big)=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k$$

ここで，$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ となるので，

$$\int_0^x t^ne^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

［解　説］

定積分と関数列の融合問題です。本問も非常に細かな誘導がつけられています。なお，$p^{(k)}(x)$ について，気になるのであれば数学的帰納法です。

$\boxed{10}$ ［名古屋大］

(1) $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$ に対して，$I_{n+2}=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx$ より，

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^n(1+x^2)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^n\,dx=\Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において $0\leqq\dfrac{x^{n+1}}{x^2+1}\leqq\dfrac{x^n}{x^2+1}$ より，$0\leqq\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\leqq\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$

$$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$I_{n+2}\geqq 0$ となり，①から $I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots③$

②③より，$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots④$

(3) $n\geqq 3$ のとき，②から $0\leqq I_{n+2}\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq I_{n-1}\leqq I_{n-2}$ となるので，①より，

$$\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+2}\leqq 2I_n,\ \ \frac{1}{n-1}=I_{n-2}+I_n\geqq 2I_n$$

よって，$\dfrac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{2(n-1)}$ から，$\dfrac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n\leqq\dfrac{n}{2(n-1)}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$$

(4) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ に対して，$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$ とおく。

①から，$I_{2n-1}+I_{2n+1}=\dfrac{1}{2n}$ となるので，$a_n=(-1)^{n-1}(I_{2n-1}+I_{2n+1})$ より，

$$\begin{aligned}S_n&=(I_1+I_3)-(I_3+I_5)+(I_5+I_7)-(I_7+I_9)+\cdots+(-1)^{n-1}(I_{2n-1}+I_{2n+1})\\&=I_1+(-1)^{n-1}I_{2n+1}\end{aligned}$$

ここで，④より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}I_{2n+1}=0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\Big[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

［解 説］

定積分と極限の融合問題です。問題文にも暗示されているように，(1)→(2)→(3)という流れと，(1)→(2)→(4)という流れで，設問が構成されています。

**11**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［新潟大］

(1)　$f_n(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-(1+x)\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}$ ………①

(i)　$(-x)^3\neq 1\ (x\neq -1)$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=\frac{1-(-x)^{3(n+1)}}{1-(-x)^3}=\frac{1-(-1)^{3(n+1)}\cdot x^{3(n+1)}}{1+x^3}=\frac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{1-x+x^2}=(-1)^{n+1}\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(ii)　$(-x)^3=1\ (x=-1)$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=n+1$ となり，$f_n(-1)=\dfrac{1}{1+1+1}-(1-1)(n+1)=\dfrac{1}{3}$

これは，②に $x=-1$ をあてはめた値と一致する。

(i)(ii)より，$f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ ………③

(2)　③より $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|=\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx$ ………④

ここで，$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ より，$0\leqq x\leqq 1$ において，

$$\frac{3}{4}\leqq x^2-x+1\leqq 1,\ 1\leqq\frac{1}{x^2-x+1}\leqq\frac{4}{3}$$

すると，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\leqq\int_0^1\frac{4}{3}x^{3n+3}dx=\frac{4}{3}\Big[\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\Big]_0^1=\frac{4}{3(3n+4)}$ ………⑤

④⑤より，$\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right|\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$ ………⑥

(3)　①より，$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx$ ………⑦

ここで，$\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-x)^{3k}(1+x)dx$ に注意して，$I_k$ を

$I_k=\displaystyle\int_0^1(-x)^{3k}(1+x)dx$ とすると，$\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx=\sum_{k=0}^{n}I_k$ となり，

$$I_k=\int_0^1(-1)^{3k}x^{3k}(1+x)dx=(-1)^k\int_0^1(x^{3k}+x^{3k+1})dx$$

$$=(-1)^k\Big[\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}\Big]_0^1=(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)\cdots\cdots\cdots⑧$$

また，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ と変形し，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，

$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta$ となり，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \cdots\cdots\cdots ⑨$$

そこで，⑦から，$\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx - \int_0^1 f_n(x)dx$

$$\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx - \int_0^1 f_n(x)dx$$

⑧⑨を代入すると，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi - \int_0^1 f_n(x)dx \cdots\cdots\cdots ⑩$$

さらに，⑥から，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right| \leqq \frac{4}{3(3n+4)} \to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right| = 0,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0 \cdots\cdots\cdots ⑪$$

⑩⑪より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$ である。

## ［解　説］

定積分と無限級数の融合問題です。(3)は唐突な印象を与えますが，(1)と(2)での巧みな誘導のため，与えられた①を 0 から 1 まで積分するという方針に混乱はないでしょう。記述量は多めですが，内容は基本の組合せとなっています。