7　　［神戸大］

k を 2 以上の整数とする。また，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ において，関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2)　数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，$x_n>1$ を示せ。

(3)　(2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ を示せ。また $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

$\boxed{8}$ ［筑波大］

$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ とし，$c \geqq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1=c$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1) $f(\pi)$ を求めよ。また，$x \geqq \pi$ のとき，$0 < f'(x) \leqq \dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_n \geqq \pi$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi| \leqq \dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

7 ［神戸大］

(1)　k を 2 以上の整数とし，$f(x)=\dfrac{1}{k}\Big((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\Big)\;(x>0)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{k}\Big(k-1-\frac{k-1}{x^k}\Big)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{x^k-1}{x^k}$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であり，

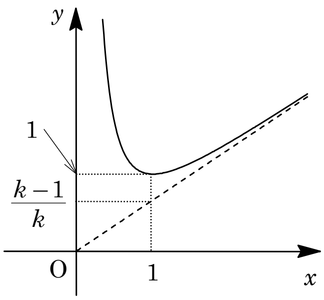
$x\to\infty$ のとき，漸近線 $y=ax+b$ の存在を仮定すると，

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\Big(k-1+\frac{1}{x^k}\Big)=\frac{k-1}{k}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\Big(f(x)-\frac{k-1}{k}x\Big)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x^{k-1}}=0$$

よって，漸近線は，$x=0$ および $y=\dfrac{k-1}{k}x$ となり，

$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　$x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ のとき，$x_n>1$ であることを数学的帰納法によって示す。

(i)　$n=1$ のとき　$x_1>1$ より成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$x_l>1$ と仮定すると, (1)から $x_{l+1}=f(x_l)>1$ となる。

よって，$n=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$x_n>1$ である。

(3)　$x_{n+1}=f(x_n)$，$1=f(1)$ より，$x_{n+1}-1=f(x_n)-f(1)\cdots\cdots\cdots①$

ここで，$x_n>1$ のとき，平均値の定理より，ある $c_n\ (1<c_n<x_n)$ において，

$$f(x_n)-f(1)=f'(c_n)(x_n-1)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x_{n+1}-1=f'(c_n)(x_n-1)$ となるので,

$$x_{n+1}-1=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{c_n^k-1}{c_n^k}(x_n-1)=\frac{k-1}{k}\Big(1-\frac{1}{c_n^k}\Big)(x_n-1)$$

さらに，$k\geqq2$ で $0<1-\dfrac{1}{c_n^k}<1$ から，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)\cdots\cdots\cdots③$

すると，$x_n-1>0$ であり, ③から $n\geqq2$ において,

$$0<x_n-1<(x_1-1)\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

よって，$0<\dfrac{k-1}{k}<1$ から, ④より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0$ すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ である。

［解 説］

非常に丁寧な誘導のついた数列の極限問題です。(1)で問われている斜めの漸近線, (3)の平均値の定理の利用については, 必須技法の 1 つです。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　$f(x)=\int_0^x\dfrac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ に対して，$f(\pi)=\int_0^\pi\dfrac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ となる。

$t=\pi\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dt=\dfrac{\pi}{\cos^2\theta}d\theta=\pi(1+\tan^2\theta)d\theta$ より，

$$f(\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\pi}{\pi^2(\tan^2\theta+1)}\cdot\pi(1+\tan^2\theta)d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$$

また，$f'(x)=\dfrac{4\pi}{x^2+\pi^2}$ となり，$x\geqq\pi$ のとき $x^2+\pi^2\geqq 2\pi^2$ から，

$$0<\frac{1}{x^2+\pi^2}\leqq\frac{1}{2\pi^2}，\ 0<f'(x)\leqq\frac{1}{2\pi^2}\cdot 4\pi=\frac{2}{\pi}$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ が $a_1=c\geqq\pi$，$a_{n+1}=f(a_n)$ を満たすとき，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq\pi$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=c\geqq\pi$ より成立。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k\geqq\pi$ と仮定する。

このとき，(1)より $\pi=f(\pi)$ で，しかも $f'(x)>0$ から $f(x)$ は単調増加するので，

$$a_{k+1}-\pi=f(a_k)-f(\pi)\geqq 0$$

よって，$a_{k+1}\geqq\pi$ となり，$n=k+1$ のときも成立。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq\pi$ が成り立つ。

(3)　まず，$a_n=\pi$ のときは $a_{n+1}=f(\pi)=\pi$ となり，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ は成立。

次に，$a_n>\pi$ のときは，平均値の定理より，

$$f(a_n)-f(\pi)=f'(b_n)(a_n-\pi)\quad(\pi<b_n<a_n)$$

すると，$a_{n+1}-\pi=f(a_n)-f(\pi)$ と合わせて，

$$|a_{n+1}-\pi|=|f(a_n)-f(\pi)|=|f'(b_n)||a_n-\pi|\quad(\pi<b_n<a_n)$$

ここで，(1)から $0<f'(b_n)\leqq\dfrac{2}{\pi}$ なので，$|f'(b_n)||a_n-\pi|\leqq\dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ となり，

$$|a_{n+1}-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$$

以上より，すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ が成り立ち，

$$|a_n-\pi|\leqq|a_1-\pi|\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}=(c-\pi)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$$

すると，$n\to\infty$ のとき $(c-\pi)\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n-1}\to 0$ となるので，$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-\pi|=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\pi$$

［解 説］

平均値の定理を利用して，数列の極限を求める有名問題です。