15 ［北海道大・文］

実数 a, b, c に対し，関数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての x に対し等式 $f(x)=f'(x)g(x)-6x$ を満たしているとする。

(1)　b と c を a で表せ。

(2)　3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

16 ［九州大・文］

k を実数とする。3 次関数 $y=x^3-kx^2+kx+1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき，k の値を求めよ。

$\boxed{15}$　　［北海道大・文］

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ に対し，$f'(x)=3x^2-6ax+b$

条件より，$g(x)$ を１次関数として，$f(x)=f'(x)g(x)-6x$ ………①

$$f(x)+6x=f'(x)g(x)\text{ ………②}$$

ここで，$f(x)+6x=x^3-3ax^2+(b+6)x+c$ を $f'(x)$ で割ると，

$$f(x)+6x=f'(x)\Big(\frac{1}{3}x-\frac{a}{3}\Big)+\Big(-2a^2+\frac{2}{3}b+6\Big)x+\Big(\frac{ab}{3}+c\Big)$$

すると，②から，$g(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{a}{3}$ となり，

$$-2a^2+\frac{2}{3}b+6=0\text{ ………③，}\ \frac{ab}{3}+c=0\text{ ………④}$$

③から $b=3a^2-9$ となり，④に代入すると，$c=-a^3+3a$ である。

(2)　(1)より，$f(x)=x^3-3ax^2+(3a^2-9)x-a^3+3a$

$$f'(x)=3x^2-6ax+3a^2-9=3\{(x-a)^2-3\}$$

$f'(x)=0$ の解は $x=a\pm\sqrt{3}$ となることより，$f(x)$ の増減を調べると，右表のようになる。

x	$\cdots$	$a-\sqrt{3}$	$\cdots$	$a+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，$f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつ条件は，$f(a-\sqrt{3})>0$ かつ $f(a+\sqrt{3})<0$ であり，①から，

$$f(a-\sqrt{3})=-6(a-\sqrt{3})>0,\ f(a+\sqrt{3})=-6(a+\sqrt{3})<0$$

よって，$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ である。

［解　説］

微分の応用題です。与えられた①式が(2)の極値を求める誘導になっています。

16 ［九州大・文］

実数 k に対して，$f(x)=x^3-kx^2+kx+1$ とおくとき，$f'(x)=3x^2-2kx+k$

ここで，3 次関数 $y=f(x)$ が極大値と極小値をもつことより，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつことが必要で，その判別式 $D/4=k^2-3k>0$ から，

$$k<0,\ 3<k\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

このとき，$f'(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$$\alpha=\frac{k-\sqrt{k^2-3k}}{3},\ \beta=\frac{k+\sqrt{k^2-3k}}{3}$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

そして，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は極大値 $f(\alpha)$，極小値 $f(\beta)$ をもち，

$$f(\alpha)-f(\beta)=\big[\,f(x)\,\big]_\beta^\alpha=\int_\beta^\alpha f'(x)dx=3\int_\beta^\alpha(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\frac{3}{6}(\alpha-\beta)^3=-\frac{1}{2}\Big(-\frac{2\sqrt{k^2-3k}}{3}\Big)^3=\frac{4}{27}(k^2-3k)^{\frac{3}{2}}$$

ここで，条件より，$\dfrac{4}{27}(k^2-3k)^{\frac{3}{2}}=4|k|^3$ から，$(k^2-3k)^3=3^6k^6$ となり，

$$k^2-3k=9k^2,\ 8k^2=-3k$$

すると，$(*)$から，$k=-\dfrac{3}{8}$ となる。

［解　説］

3 次関数の極大値と極小値の差という有名問題です。なお，解答例はテクニカルな方法で記しましたが，普通に解と係数の関係を利用する解法でも構いません。