18　　［東京大・文］

座標平面の原点を O とし, O, A$(1,\ 0)$, B$(1,\ 1)$, C$(0,\ 1)$を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする。3 点P$(p,\ 0)$, Q$(0,\ q)$, R$(r,\ 1)$はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあり, 3 点 O, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が$\dfrac{1}{3}$の三角形の 3 頂点であるとする。

(1) q と r を p で表し, p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$の最大値, 最小値を求めよ。

$\boxed{19}$ ［熊本大・医］

座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

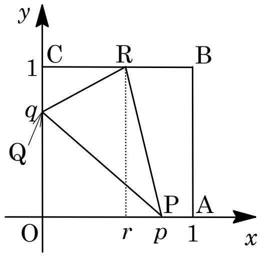
20 ［東京大・文］

O を原点とする座標平面を考える。不等式 $|x|+|y|\leqq 1$ が表す領域を D とする。また，点 P，Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R が動く範囲を E とする。

(1) D, E をそれぞれ図示せよ。

(2) a, b を実数とし，不等式 $|x-a|+|y-b|\leqq 1$ が表す領域を F とする。点 S，T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を満たす点 U が動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。

$\boxed{18}$　　　　［東京大・文］



(1)　3 点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q)$，$\mathrm{R}(r,\ 1)$ に対して，$0 < p \leqq 1$，$0 < q \leqq 1$，$0 \leqq r \leqq 1$ とし，まず $\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{3}$ から，

$$\frac{1}{2}pq = \frac{1}{3},\ q = \frac{2}{3p} \cdots\cdots\cdots ①$$

さらに，$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{3}$ から，四角形 OPRQ の面積が $\frac{2}{3}$ となるので，$\frac{1}{2}(p+r)\cdot 1 - \frac{1}{2}(1-q)r = \frac{2}{3}$ から，

$$p + r - r + qr = \frac{4}{3},\ p + qr = \frac{4}{3} \cdots\cdots\cdots ②$$

①②から $p + \frac{2r}{3p} = \frac{4}{3}$ となり，$3p^2 + 2r = 4p$ より，$r = \frac{1}{2}p(4-3p) \cdots\cdots\cdots ③$

ここで，①から $0 < \frac{2}{3p} \leqq 1$ となり，$0 < p \leqq 1$ のもとで，$p \geqq \frac{2}{3} \cdots\cdots\cdots ④$

同様に，③から，$0 \leqq \frac{1}{2}p(4-3p) \leqq 1$ となり，$0 < p \leqq 1$ のもとで，

$$p(4-3p) \leqq 2,\ 3p^2 - 4p + 2 \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤はつねに成立するので，p のとりうる値の範囲は④から，$\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ⑥$

このとき，⑥から $1 \leqq \frac{1}{p} \leqq \frac{3}{2}$ となるので，①より，$\frac{2}{3} \leqq q \leqq 1$

また，③から，$r = 2p - \frac{3}{2}p^2 = -\frac{3}{2}\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ となり，⑥より，

$$2 - \frac{3}{2} \leqq r \leqq \frac{2}{3},\ \frac{1}{2} \leqq r \leqq \frac{2}{3}$$

(2)　①③より，$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}} = \frac{r}{q} = \frac{1}{2}p(4-3p)\cdot\frac{3p}{2} = \frac{3}{4}p^2(4-3p)$

ここで，$f(p) = p^2(4-3p) = -3p^3 + 4p^2$ とおくと，$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{4}f(p)$ となり，

$$f'(p) = -9p^2 + 8p = -p(9p-8)$$

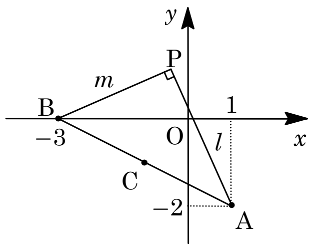
すると，⑥における $f(p)$ の増減は右表のようになり，$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値は $\frac{3}{4}\cdot\frac{256}{243} = \frac{64}{81}$，最小値は $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9} = \frac{2}{3}$ となる。

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{8}{9}$	$\nearrow$	$\frac{256}{243}$	$\searrow$	1

［解　説］

図形量の最大・最小に関する標準的な問題です。誘導が丁寧なうえ，計算も穏やかです。

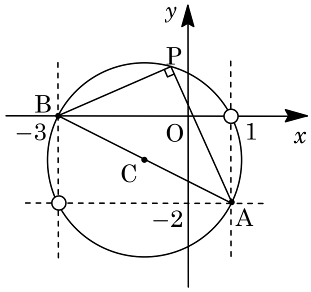
19　　［熊本大・医］



(1)　$l : y = ax - a - 2 = a(x-1) - 2$ ……①は点 A$(1,\ -2)$ を通る傾き a の直線，$m : y = bx + 3b = b(x+3)$ ……②は点B$(-3,\ 0)$ を通る傾き b の直線である。

そして，l と m は直交するので，$ab = -1$ ………③

実数 a，b が③を保ちながら変化するとき，l と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円を描く。



この円は中心が線分 AB の中点C$(-1,\ -1)$，半径が $\sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$ なので，方程式は，

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 \text{………④}$$

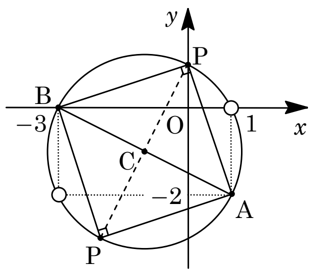
ただし，①は点 A を通る直線のうち $x=1$ を表さず，②は点 B を通る直線のうち $x=-3$ を表さない。

よって，点 P の軌跡は，④で表される円から 2 点 $(1,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を除く。

(2)　②③から $m : y = -\dfrac{1}{a}(x+3)$，すなわち $m : x + ay + 3 = 0$ となり，

$$\mathrm{AP} = \frac{|1-2a+3|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+1}}$$

また，①から $l : ax - y - a - 2 = 0$ となり，$\mathrm{BP} = \dfrac{|-3a-a-2|}{\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{|4a+2|}{\sqrt{a^2+1}}$



(3)　△APB の面積が最大となるのは，点 P と直線 AB の距離が最大のときである。

すなわち，△APB が直角二等辺三角形の場合より AP＝BP となり，(2)から，

$$\frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|4a+2|}{\sqrt{a^2+1}},\quad |2a-4| = |4a+2|$$

(i)　$2a-4 = 4a+2$ のとき　$2a = -6$ より $a = -3$

(ii)　$2a-4 = -(4a+2)$ のとき　$6a = 2$ より $a = \dfrac{1}{3}$

(i)(ii)より，求める a の値は，$a = -3,\ \dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

軌跡の標準的な問題です。点 P の座標を求める方法もありますが，ここでは図形的に処理しました。ただ，どのような解法にせよ，軌跡の限界のチェックは重要です。

$\boxed{20}$ ［東京大・文］

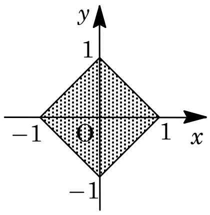
(1) 不等式 $|x|+|y|\leqq 1$ が表す領域 D を，x, y の符号で場合分けをして表すと，

(i) $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$x+y\leqq 1$ より，$y\leqq -x+1$

(ii) $x<0,\ y\geqq 0$ のとき　$-x+y\leqq 1$ より，$y\leqq x+1$

(iii) $x<0,\ y<0$ のとき　$-x-y\leqq 1$ より，$y\geqq -x-1$

(iv) $x\geqq 0,\ y<0$ のとき　$x-y\leqq 1$ より，$y\geqq x-1$



(i)〜(iv)より，D は右図の網点部であり，境界は領域に含む。

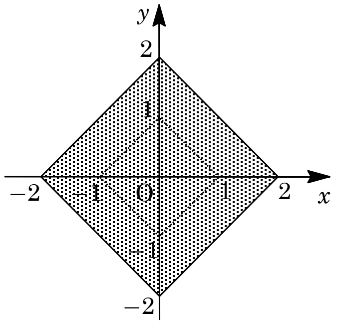
次に，点 P, Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

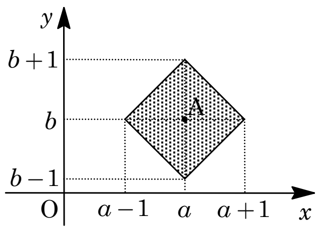
ここで，$-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ とおくと，対称性から点 Q′ は領域 D を動き，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$

そこで，まず点 P を D 上で固定すると，点 R は，点 P を中心に領域 D を平行移動した正方形の内部または辺上を動く。

次に，この状態を保ったまま点 P を D 上で動かすと，点 R の動く範囲 E は，点 P を中心とする正方形の通過領域となり，図示すると右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



(2) 不等式 $|x-a|+|y-b|\leqq 1$ の表す領域 F を図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含む。



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b)$ とおき，点 S, T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおくと，点 P, Q は領域 D を動く。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=(\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})-(\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

よって，点 U が動く範囲 G は，点 R の動く範囲 E と一致する。

［解　説］

過去に幾度も出されていますが，任意に動く 2 点に対して，1 つの点をいったん固定して軌跡や領域を考えるという問題です。(2)は領域の絡んだ論証で，いろいろな書き方が考えられますが，上の解答例はその 1 例です。