$\boxed{11}$　　　［千葉大・理］

三角形 ABC は $\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=2\mathrm{BC}$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$\mathrm{AD}=15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A=\angle\mathrm{BAC}$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2)　辺 BC の長さを求めよ。

$\boxed{12}$　　［東京医歯大］

三角形 ABC において，頂点 A，B，C の角の大きさをそれぞれ A，B，C，対辺の長さをそれぞれ a, b, c で表す。また a, b, c は，この順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなす。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(2)　$C=2A$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

$\boxed{13}$ ［東京工大］

(1)　$h>0$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{P}(h,\ s)$，点 $\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする。ただし，$s<t$ とする。三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ $p,\ q,\ r$ とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

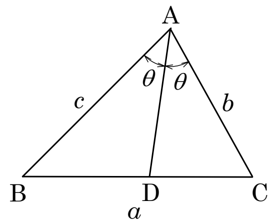
が成り立つことを示せ。また，等号が成立するときの $s,\ t$ の値を求めよ。

(2)　四面体 ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，辺 AD, BD, CD の長さをそれぞれ $l,\ m,\ n$ とする。このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ。

11　　［千葉大・理］



(1)　△ABC に対して，AB $=c$，BC $=a$，CA $=b$ とおく。また，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D として，

$$b+c=2a\cdots\cdots\text{①},\ \ \mathrm{AD}=15\cdots\cdots\text{②}$$

さて，△ABC は内接円の半径が 4 より，その面積を S とおくと，①より，

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot 4=2\cdot 3a=6a\cdots\cdots\text{③}$$

また，$\theta=\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$ から，①②を用いて，

$$S=\frac{1}{2}b\cdot\mathrm{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}c\cdot\mathrm{AD}\sin\theta=\frac{1}{2}(b+c)\cdot 15\sin\theta=15a\sin\theta\cdots\cdots\text{④}$$

③④より，$15a\sin\theta=6a$ となり，$\sin\theta=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

すると，$A=2\theta$ から，$\cos A=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\dfrac{4}{25}=\dfrac{17}{25}\cdots\cdots$⑤

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{17}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{(25+17)(25-17)}}{25}=\frac{4\sqrt{21}}{25}\cdots\cdots\text{⑥}$$

(2)　⑥より，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{2\sqrt{21}}{25}bc$ となり，③に代入すると，

$$\frac{2\sqrt{21}}{25}bc=6a,\ \ bc=\frac{75}{\sqrt{21}}a=\frac{25\sqrt{21}}{7}a\cdots\cdots\text{⑦}$$

また，△ABC に余弦定理を適用して，①⑤を利用すると，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cdot\frac{17}{25}=4a^2-\frac{84}{25}bc\cdots\cdots\text{⑧}$$

⑦⑧より，$a^2=4a^2-\dfrac{84}{25}\cdot\dfrac{25\sqrt{21}}{7}a$ となり，$3a^2=12\sqrt{21}a$ から，

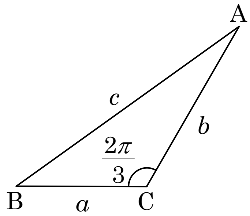
$$\mathrm{BC}=a=4\sqrt{21}$$

［解　説］

三角比の応用問題です。試行錯誤が少し必要ですが，(1)の結論と(2)のプロセスとの繋がりを見つけるのがポイントになっています。

12　　［東京医歯大］

(1)　△ABC において，a，b，c がこの順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなすので，



$$2b=a+c\cdots\cdots①,\ \ a\leqq b\leqq c\cdots\cdots②$$

ここで，$C=\dfrac{2\pi}{3}$ から，余弦定理を利用して，

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3},\ \ c^2=a^2+b^2+ab\cdots\cdots\cdots③$$

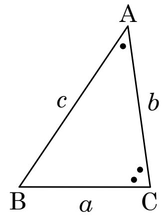
①③から，$(2b-a)^2=a^2+b^2+ab$ となり，

$$4b^2-4ab+a^2=a^2+b^2+ab,\ \ b(3b-5a)=0$$

すると，$b=\dfrac{5}{3}a$，$c=2\cdot\dfrac{5}{3}a-a=\dfrac{7}{3}a$ から，$a=3k$ $(k>0)$ とおくと，$b=5k$，$c=7k$ となり，②および $c<a+b$ を満たしており，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+49-9}{2\cdot5\cdot7}=\frac{13}{14}$$

(2)　$C=2A$ のとき，$A<C$ より $a<c$ となるので，②を満たし，$B=\pi-A-2A=\pi-3A>0$ から $0<A<\dfrac{\pi}{3}$ ………④



すると，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin(\pi-3A)}=\dfrac{c}{\sin 2A}=2R$ となり，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin 3A}=\frac{c}{\sin 2A}=2R$$

①に代入すると，$2\sin 3A=\sin A+\sin 2A$ から，

$$2(3\sin A-4\sin^3 A)=\sin A+2\sin A\cos A$$

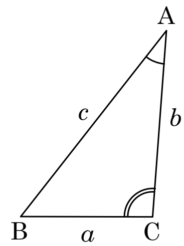
$\sin A>0$ から，$6-8\sin^2 A=1+2\cos A$ となり，$5-8(1-\cos^2 A)=2\cos A$

$$8\cos^2 A-2\cos A-3=0,\ \ (2\cos A+1)(4\cos A-3)=0$$

④から $\dfrac{1}{2}<\cos A<1$ なので，$\cos A=\dfrac{3}{4}$ である。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$A<C$ より $a<c$ となるので，②を満たし，

$$B=\pi-A-\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-2A>0 \text{ から } 0<A<\frac{\pi}{3}\cdots\cdots\cdots⑤$$



(2)と同様にして，①から $2\sin B=\sin A+\sin C$ となり，

$$2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2A\right)=\sin A+\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$$

展開すると，$\sqrt{3}\cos 2A+\sin 2A=\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A$ より，

$$2\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$$

すると，⑤から$\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$となり，$\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)>0$なので，

$$4\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

展開して，$2\sqrt{3}\cos A-2\sin A=\sqrt{3}$から，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2\cos A-1)$となる。

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$に代入すると，$\dfrac{3}{4}(4\cos^2 A-4\cos A+1)+\cos^2 A=1$から，

$$16\cos^2 A-12\cos A-1=0$$

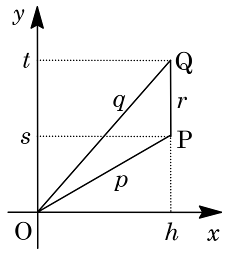
⑤から$\dfrac{1}{2}<\cos A<1$なので，$\cos A=\dfrac{6+\sqrt{52}}{16}=\dfrac{3+\sqrt{13}}{8}$である。

［解　説］

いろいろな解法が考えられる三角比の応用問題です。(1)と(2)は標準的ですが, (3)は力技だけではうまくいかず，試行錯誤が必要になりました。上の解答例では，展開して合成するという二度手間になっていますが……。

13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　$h>0$，$s<t$ のとき，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(h,\ s)$，$\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対し，$\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$\mathrm{PQ}=r$ とすると，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積 S は,



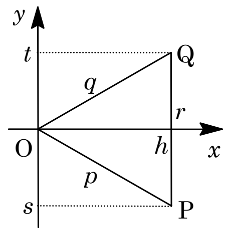
$$S=\frac{1}{2}rh=\frac{1}{2}(t-s)h$$

このとき，$A=p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S$ とおくと，

$$\begin{aligned}A&=(h^2+s^2)+(h^2+t^2)+(t-s)^2-2\sqrt{3}(t-s)h\\&=2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+2t^2+2s^2-2ts\\&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2-\frac{3}{2}(t-s)^2+2t^2+2s^2-2ts\\&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}s^2+ts=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}(t+s)^2\end{aligned}$$

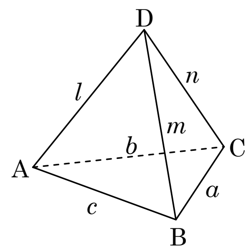
すると，$A\geqq 0$ すなわち $p^2+q^2+r^2\geqq 4\sqrt{3}S$ が成立する。

また，等号が成立するのは，$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)$ かつ $t+s=0$ のときで，まとめると，$s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ である。



このとき，$p=q=r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}h$ となることより，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は正三角形である。

(2) 四面体 ABCD に対し，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{AD}=l$，$\mathrm{BD}=m$，$\mathrm{CD}=n$ とし，さらに $S_1=\triangle\mathrm{ABC}$，$S_2=\triangle\mathrm{DAB}$，$S_3=\triangle\mathrm{DBC}$，$S_4=\triangle\mathrm{DCA}$ とおくと，(1)から，



$a^2+b^2+c^2\geqq 4\sqrt{3}S_1$ （等号は $a=b=c$ のとき）

$l^2+m^2+c^2\geqq 4\sqrt{3}S_2$ （等号は $l=m=c$ のとき）

$m^2+n^2+a^2\geqq 4\sqrt{3}S_3$ （等号は $m=n=a$ のとき）

$n^2+l^2+b^2\geqq 4\sqrt{3}S_4$ （等号は $n=l=c$ のとき）

この 4 つの不等式の各辺の和をとると，

$$2a^2+2b^2+2c^2+2l^2+2m^2+2n^2\geqq 4\sqrt{3}(S_1+S_2+S_3+S_4)$$

そこで，四面体 ABCD の表面積を T とすると，$T=S_1+S_2+S_3+S_4$ から，

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2\geqq 2\sqrt{3}T$$

また，等号がが成立するのは，$a=b=c=l=m=n$ のときで，このとき四面体 ABCD は正四面体である。

［解　説］

四面体を対象にした計量問題です。(1)の誘導が(2)の証明へとスムーズにつながっています。