20　　［熊本大・医］

赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1)　k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2)　k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3)　ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

21　［千葉大・理］

コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A, B, C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚，箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚，箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚，箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2) A, B, C いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。

(3) 試行の後に箱 A を開けるとちょうど 2 枚のコインが入っていた。このとき箱 B にコインがちょうど 2 枚入っている確率を求めよ。

22 ［京都大］

1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。このとき次の条件を満たす確率を n を用いて表せ。ただし $X_0=0$ としておく。

条件：$1 \leqq k \leqq n$ を満たす k のうち，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである。

23　　［東北大・理］

10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする。この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする。2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　$p(n+1,\ 2)$ を $p(n,\ 2)$ と $p(n,\ 1)$ を用いて表せ。

(2)　$p(n,\ 1)$ を求めよ。

(3)　$p(n,\ 2)$ を求めよ。

20　　［熊本大・医］

(1)　まず，赤球 n 個，白球 n 個，合計 $2n$ 個入っている箱から，n 個の球を取り出す ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 通りが同様に確からしいとする。

取り出した n 個の球のうち赤球が k 個 $(0 \leqq k \leqq n)$ となるのは，${}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}$ 通りであり，さらに ${}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k}$ ……①を考え合わせると，その確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

(2)　取り出した n 個の球のうち赤球が k 個 $(1 \leqq k \leqq n)$ となり，さらにゲームに勝つ確率 P_k は，$P_k = \dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \cdot \left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ であり，

$${}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n^2\{(n-1)!\}^2} = \frac{2(2n-1)}{n}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

これより，$P_k = \dfrac{\left(\dfrac{n}{k}\right)^2({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{\dfrac{2(2n-1)}{n}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} \cdot \left(\dfrac{k}{n}\right)^2 = \dfrac{n}{2(2n-1)} \cdot \dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ である。

(3)　ゲームに勝つ確率 P は，$P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{n}{2(2n-1)\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} \sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2$ ………②

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2 = ({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2 + ({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2 + \cdots + ({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2$ の値を求めるために，$(x+1)^{n-1}(x+1)^{n-1} = (x+1)^{2n-2}$ ……③に注意して左辺を展開し，①を用いると，

$$({}_{n-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1})({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}x + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_0 x^{n-1})$$

そして，この式の x^{n-1} の係数に着目すると，$({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2 + ({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2 + \cdots + ({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2$ となり，また③の右辺を展開したとき，x^{n-1} の係数は ${}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$ であることより，

$$({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2 + ({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2 + \cdots + ({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2 = {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1} \text{ ………④}$$

すると，②④から，$P = \dfrac{n}{2(2n-1)\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} \cdot {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1} = \dfrac{n}{2(2n-1)}$ である。

［解　説］

丁寧に誘導のついた確率と二項係数の問題です。ポイントは④を導くことですが，上記の方法は修得しておくことの１つです。

$\boxed{21}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・理］

(1)　条件より，さいころを 1 回振ってコインを 1 枚，箱 A，箱 B，箱 C に入れる確率は，それぞれ$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{2}{6}$，$\dfrac{3}{6}$である。

さて，さいころを 5 回振ったとき，箱 A，箱 B，箱 C にコインがそれぞれ 2 枚，2 枚，1 枚入っている確率は，

$$\frac{5!}{2!\,2!}\Big(\frac{1}{6}\Big)^2\Big(\frac{2}{6}\Big)^2\cdot\frac{3}{6}=\frac{2\cdot3\cdot5\cdot2^2\cdot3}{6^5}=\frac{5}{108}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　さいころを 5 回振ったとき，箱 A，箱 B，箱 C にコインが少なくとも 1 枚入っている事象をそれぞれ A，B，C とし，その確率を $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$ とおくと，

$$P(\overline{A})=\Big(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\Big)^5=\Big(\frac{5}{6}\Big)^5,\ P(\overline{B})=\Big(\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\Big)^5=\Big(\frac{4}{6}\Big)^5$$

$$P(\overline{C})=\Big(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\Big)^5=\Big(\frac{3}{6}\Big)^5,\ P(\overline{A}\cap\overline{B})=\Big(\frac{3}{6}\Big)^5,\ P(\overline{B}\cap\overline{C})=\Big(\frac{1}{6}\Big)^5$$

$$P(\overline{C}\cap\overline{A})=\Big(\frac{2}{6}\Big)^5,\ P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=0$$

すると，箱 A，箱 B，箱 C いずれにもコインが 1 枚以上入っている確率は，

$$P(A\cap B\cap C)=1-P(\overline{A\cap B\cap C})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})$ の値は，

$$P(\overline{A})+P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(\overline{B}\cap\overline{C})-P(\overline{C}\cap\overline{A})+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$

$$=\Big(\frac{5}{6}\Big)^5+\Big(\frac{4}{6}\Big)^5+\Big(\frac{3}{6}\Big)^5-\Big(\frac{3}{6}\Big)^5-\Big(\frac{1}{6}\Big)^5-\Big(\frac{2}{6}\Big)^5+0=\frac{4116}{6^5}=\frac{343}{648}$$

よって，②より，$P(A\cap B\cap C)=1-\dfrac{343}{648}=\dfrac{305}{648}$

(3)　さいころを 5 回振ったとき，コインが箱 A に 2 枚入っているのは，箱 B または C には 3 枚入っていることなので，その確率は，

$$\frac{5!}{2!\,3!}\Big(\frac{1}{6}\Big)^2\Big(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\Big)^3=\frac{2\cdot5\cdot5^3}{6^5}=\frac{2\cdot5^4}{6^5}$$

すると，箱 A に 2 枚のコインが入っていたとき，箱 B にもコインが 2 枚入っている条件付き確率は，①を利用して，

$$\frac{5}{108}\div\frac{2\cdot5^4}{6^5}=\frac{5}{3\cdot6^2}\cdot\frac{6^5}{2\cdot5^4}=\frac{6^2}{5^3}=\frac{36}{125}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。(2)は余事象の確率と和事象の確率を組み合わせた有名な解法で記述しました。

22　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とするとき，$X_{k-1}\leqq 4$ かつ $X_k\geqq 5$ が成立するような $k(1\leqq k\leqq n)$ がただ 1 つという条件を満たす場合は，$X_0=0$ から，$2\leqq k\leqq n$，$1\leqq l\leqq n-k+1$ として，

$$X_i\leqq 4\ (1\leqq i\leqq k-1),\ X_i\geqq 5\ (k\leqq i\leqq k+l-1),\ X_i\leqq 4\ (k+l\leqq i\leqq n)$$

この確率を $P_{k,\,l}$ とおくと，$k=n$ のときも含めて，

$$P_{k,\,l}=\Big(\frac{4}{6}\Big)^{k-1}\Big(\frac{2}{6}\Big)^{l}\Big(\frac{4}{6}\Big)^{n-k-l+1}=\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-l}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{l}=\frac{2^{n-l}}{3^n}$$

ここで，k の値を固定し，$l=1,\ 2,\ \cdots,\ n-k+1$ について，その和を P_k とおくと，

$$P_k=\sum_{l=1}^{n-k+1}P_{k,\,l}=\frac{1}{3^n}\sum_{l=1}^{n-k+1}2^{n-l}=\frac{1}{3^n}\sum_{l=k-1}^{n-1}2^{l}=\frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^{k-1}(2^{n-k+1}-1)}{2-1}$$

$$=\frac{2^n-2^{k-1}}{3^n}=\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n}-\frac{2^{k-1}}{3^n}\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$k=1$ のとき，$X_0=0$ から，$1\leqq l\leqq n$ として，

$$X_i\geqq 5\ (1\leqq i\leqq l),\ X_i\leqq 4\ (l+1\leqq i\leqq n)$$

この確率を $P_{1,\,l}$ とおくと，$P_{1,\,l}=\Big(\frac{2}{6}\Big)^{l}\Big(\frac{4}{6}\Big)^{n-l}=\Big(\frac{1}{3}\Big)^{l}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-l}=\frac{2^{n-l}}{3^n}$

上式は $l=n$ のときも成立し，$l=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，その和を P_1 とおくと，

$$P_1=\sum_{l=1}^{n}P_{1,\,l}=\frac{1}{3^n}\sum_{l=1}^{n}2^{n-l}=\frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n}-\frac{1}{3^n}$$

すると，$k=1$ のときも$(*)$は成立している。

以上より，求める確率 P は，

$$P=\sum_{k=1}^{n}P_k=\sum_{k=1}^{n}\Big\{\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n}-\frac{2^{k-1}}{3^n}\Big\}=n\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n}-\frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=n\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n}-\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n}+\frac{1}{3^n}$$

$$=(n-1)\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n}+\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n}$$

［解 説］

与えられた条件を正確に把握して，確率を計算する問題です。問題文に「ただし $X_0=0$ としておく」と軽く記されていることが，着眼点として最優先のことがらでした。

23　　［東北大・理］

(1) 条件の試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする。

さて，試行を $n+1$ 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 2 個のとき，次の 2 つの場合がある。

(i) 試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 1 個のとき

袋には，赤玉 4 個と白玉 6 個が入っているので，そこから赤玉を 1 個取り出す。このときの確率は $\dfrac{4}{10}p(n,\ 1)=\dfrac{2}{5}p(n,\ 1)$ である。

(ii) 試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 2 個のとき

袋には，赤玉 3 個と白玉 7 個が入っているので，そこから白玉を 1 個取り出す。このときの確率は $\dfrac{7}{10}p(n,\ 2)$ である。

(i)(ii)より，$p(n+1,\ 2)=\dfrac{2}{5}p(n,\ 1)+\dfrac{7}{10}p(n,\ 2)$ となる。

(2) 試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 1 個であるのは，n 回のうち 1 回だけ赤玉を取り出し，それ以外は白玉を取り出す場合である。

初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っており，k 回目 $(1\leqq k\leqq n)$ だけに赤玉を取り出す確率は，$\left(\dfrac{5}{10}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{5}{10}\cdot\left(\dfrac{6}{10}\right)^{n-k}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-k}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k}$ となり，

$$p(n,\ 1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\cdot\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\cdot5\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}=5\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(3) (1)(2)より，$p(n+1,\ 2)=\dfrac{2}{5}\left\{5\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}+\dfrac{7}{10}p(n,\ 2)$ となり，

$$p(n+1,\ 2)=\frac{7}{10}p(n,\ 2)+2\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

また，$p(2,\ 2)=\dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{10}=\dfrac{1}{5}$ となり，$p_n=p(n,\ 2)$ とおくと，$p_2=\dfrac{1}{5}$ で，

$$p_{n+1}=\frac{7}{10}p_n+2\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，①を満たす 1 つの数列を $p_n=\alpha\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}+\beta\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ ($\alpha,\ \beta$ は定数) とおくと，

$$\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{7}{10}\left\{\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}+2\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdots\cdots\cdots②$$

②から，$\dfrac{3}{5}\alpha=\dfrac{7}{10}\alpha+2$，$\dfrac{1}{2}\beta=\dfrac{7}{10}\beta-2$ となり，$(\alpha,\ \beta)=(-20,\ 10)$

①－②より，$p_{n+1}-\alpha\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}-\beta\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\dfrac{7}{10}\left\{p_n-\alpha\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}-\beta\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}$ となり，

$$p_n-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^n-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\{p_2-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^2-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}\quad(n\geqq 2)$$

$(\alpha,\ \beta)=(-20,\ 10)$，$p_2=\dfrac{1}{5}$を代入して，

$$p_n+20\left(\frac{3}{5}\right)^n-10\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\{\frac{1}{5}+20\left(\frac{3}{5}\right)^2-10\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}$$

$$=\frac{49}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}=10\left(\frac{7}{10}\right)^n$$

よって，$p_n=10\left(\dfrac{7}{10}\right)^n-20\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$となるので，

$$p(n,\ 2)=10\left(\frac{7}{10}\right)^n-20\left(\frac{3}{5}\right)^n+10\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad(n\geqq 2)$$

［解 説］

丁寧な誘導のついた確率と漸化式の標準的問題です。なお, (3)の漸化式の解法については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。