$\boxed{30}$ ［信州大・医］

次の問いに答えよ。

(1)　2^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

(2)　n^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

31　　　　［京都大・理］

$f(x)=x^3+2x^2+2$ とする。$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ。

$\boxed{32}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・理］

　n を自然数とし，$a_n = n(n+1)$ とする。さらに，a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。

(1)　d_n は偶数であることを示せ。

(2)　d_n は 8 で割り切れないことを示せ。

(3)　p を 5 以上の素数とするとき，d_n は p で割り切れないことを示せ。

(4)　$d_n \leqq 12$ を示せ。また，$d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ。

33　　［名古屋大・理］

正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1)　このような n の中で最小のものを求めよ。

(2)　このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

$\boxed{34}$ ［神戸大］

次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を$\{a_n\}$とする。

1，3，4，1，3，4，1，3，4，…

すなわち，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=4$ で, 4 以上の自然数 n に対し，$a_n=a_{n-3}$ とする。この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_n を求めよ。

(2)　$S_n=2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ。

(3)　どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ。

$\boxed{35}$　　［一橋大］

p を自然数とする。数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 1,\ a_2 = p^2,\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在することを示せ。

$\boxed{36}$ ［千葉大・理］

$a_1=3$，$a_2=2$ とし，$n \geqq 2$ のとき，$a_{n+1}={a_n}^2+a_n-1$ として数列$\{a_n\}$を定める。

(1) $n \geqq 2$ のとき $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$ が成り立つような自然数 n を求めよ。

37　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］

n を自然数とする。数列 $2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1$ のように各項が 1 または 2 の有限数列（項の個数が有限である数列）を考える。各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする。例えば，$n=1$ のときは，1 項からなる数列 1 のみである。したがって，$s_1=1$ となる。$n=2$ のときは，1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列 $1,\ 1$ の 2 つである。したがって，$s_2=2$ となる。

(1)　s_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ。

(3)　3 以上のすべての n に対して $s_n-\alpha s_{n-1}=\beta(s_{n-1}-\alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α，β の組 $(\alpha,\ \beta)$ を 1 組求めよ。

(4)　s_n を求めよ。

$\boxed{38}$ ［新潟大・医］

半径がそれぞれ a, b の円を C_a，C_b とする。C_a 上に点 A, C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A, B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで，点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，自然数 m, n の最大公約数を $\gcd(m,\ n)$ で表せ。

(1) a, b を自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，a, b を用いて表せ。

(2) a, b を正の有理数とし，$a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$ とおく。ここで p, q は互いに素な自然数とし，s, t も互いに素な自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，p, q, s, t を用いて表せ。

(3) a, b は互いに素な自然数とする。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ に対して，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。

$\boxed{30}$ ［信州大・医］

(1)　自然数 n に対し，$2^n=(3-1)^n$ に注意して二項定理を適用すると，

$$2^n-1=(3-1)^n-1\equiv(-1)^n-1 \pmod 3$$

そこで，m を自然数とし，n を偶奇に場合分けして，以下，mod 3 で記すと，

(i)　n が偶数 $(n=2m)$ のとき　$2^n-1\equiv(-1)^{2m}-1\equiv1-1\equiv0$

(ii)　n が奇数 $(n=2m-1)$ のとき　$2^n-1\equiv(-1)^{2m-1}-1\equiv-1-1\equiv-2\equiv1$

(i)(ii)より，2^n-1 が 3 で割り切れる自然数 n は，$n=2m$ (m は自然数)である。

(2)　k を 0 以上の整数として，n を $n=3k+l$ $(l=1,\ 2,\ 3)$ とおくと，二項定理より，

$$n^n-1=(3k+l)^n-1\equiv l^n-1 \pmod 3$$

そこで，n を $n=3k+l$ $(l=1,\ 2,\ 3)$ に場合分けして，以下，mod 3 で記すと，

(i)　$n=3k+1$ のとき　$n^n-1\equiv1^n-1\equiv1-1\equiv0$

(ii)　$n=3k+2$ のとき　$n^n-1\equiv2^n-1$ となり，(1)から，

(ii-i)　n が偶数のとき　$2^n-1\equiv0$

(ii-ii)　n が奇数のとき　$2^n-1\equiv1$

(iii)　$n=3k+3$ のとき　$n^n-1\equiv3^n-1\equiv0^n-1\equiv0-1\equiv-1\equiv2$

(i)(ii)より，n^n-1 が 3 で割り切れる自然数 n は，

$$n=3k+1,\ n=3k+2\ (n \text{ は偶数})$$

そこで，n を自然数 m を用いて表すと，

$$n=3(m-1)+1=3m-2,\ n=3(2m-2)+2=6m-4$$

［解　説］

整数問題の定番の 1 つです。類題にかすかな記憶があったので調べたところ，2003 年に一橋大で出題されていました。

31　　［京都大・理］

整数 n に対し，$f(n)=n^3+2n^2+2=n^3+2(n^2+1)$ より n を偶奇に場合分けする。

(i)　n が偶数のとき

このとき，$|f(n)|$ は偶数となり，$n+1$ は奇数から $|f(n+1)|$ は奇数である。

そこで，偶数の素数は 2 のみから，$|f(n)|=2$ となり，

$$n^3+2n^2+2=\pm 2$$

(i-i)　$n^3+2n^2+2=2$ のとき

$n^3+2n^2=0$ から $n=0,\ -2$

$n=0$ のとき，$|f(n+1)|=|1^3+2\cdot 1^2+2|=5$ から素数である。

$n=-2$ のとき，$|f(n+1)|=|(-1)^3+2\cdot(-1)^2+2|=3$ から素数である。

(i-ii)　$n^3+2n^2+2=-2$ のとき

$$n^3+2n^2+4=0\ \cdots\cdots\cdots ①$$

①を満たす整数 n は負の偶数しかも 4 の約数から，$n=-2,\ -4$ が考えられる。

ところが，いずれも①は成立しない。

(ii)　n が奇数のとき

このとき，$|f(n)|$ は奇数となり，$n+1$ は偶数から $|f(n+1)|$ は偶数である。

そこで，偶数の素数は 2 のみから，$|f(n+1)|=2$ となり，

$$(n+1)^3+2(n+1)^2+2=\pm 2$$

(i-i)　$(n+1)^3+2(n+1)^2+2=2$ のとき

$(n+1)^3+2(n+1)^2=0$ から $n+1=0,\ -2$，すなわち $n=-1,\ -3$

$n=-1$ のとき，$|f(n)|=|(-1)^3+2\cdot(-1)^2+2|=3$ から素数である。

$n=-3$ のとき，$|f(n)|=|(-3)^3+2\cdot(-3)^2+2|=7$ から素数である。

(ii-ii)　$(n+1)^3+2(n+1)^2+2=-2$ のとき

$$(n+1)^3+2(n+1)^2+4=0\ \cdots\cdots\cdots ②$$

(i-ii)と同様に，②を満たす整数 $n+1$ は存在しない。

(i)(ii)より，求める整数 n は，$n=0,\ -1,\ -2,\ -3$ である。

［解　説］

素数の絡んだ整数問題です。注目することは，「偶数の素数は 2 だけ」ということです。過去に何度も出題されていることですが。

32　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・理］

(1)　連続 2 整数の積 $a_n=n(n+1)$ と $a_{n+3}=(n+3)(n+4)$ は，ともに偶数なので，a_n と a_{n+3} の最大公約数 d_n は偶数である。

(2)　d_n が $8=2^3$ で割り切れると仮定すると，a_n と a_{n+3} はともに 8 で割り切れ，

$$n(n+1)=8k\cdots\cdots①,\ (n+3)(n+4)=8l\cdots\cdots②\ (k \text{ と } l \text{ は自然数})$$

n と $n+1$ は互いに素なので，①から，n，$n+1$ のいずれかが 8 の倍数である。

(i)　n が 8 の倍数のとき

$n+3$ と $n+4$ は互いに素で，$(n+3)-n=3$，$(n+4)-n=4$ から，いずれも 8 の倍数ではない。すなわち②は成立しない。

(ii)　$n+1$ が 8 の倍数のとき

$n+3$ と $n+4$ は互いに素で，$(n+3)-(n+1)=2$，$(n+4)-(n+1)=3$ から，いずれも 8 の倍数ではない。すなわち②は成立しない。

(i)(ii)より，d_n は 8 で割り切れない。

(3)　5 以上の素数 p に対し，d_n が p で割り切れると仮定すると，a_n と a_{n+3} はともに p で割り切れ，

$$n(n+1)=pk'\cdots\cdots③,\ (n+3)(n+4)=pl'\cdots\cdots④\ (k' \text{ と } l' \text{ は自然数})$$

n と $n+1$ は互いに素なので，③から，n，$n+1$ のいずれかが p の倍数である。

(i)　n が p の倍数のとき

$n+3$ と $n+4$ は互いに素で，$(n+3)-n=3$，$(n+4)-n=4$ から，いずれも p の倍数ではない。すなわち④は成立しない。

(ii)　$n+1$ が p の倍数のとき

$n+3$ と $n+4$ は互いに素で，$(n+3)-(n+1)=2$，$(n+4)-(n+1)=3$ から，いずれも p の倍数ではない。すなわち④は成立しない。

(i)(ii)より，d_n は p で割り切れない。

(4)　まず, (2), (3)と同様にして，d_n が $9=3^2$ で割り切れないことを示す。

そこで，d_n が 9 で割り切れると仮定すると，a_n と a_{n+3} はともに 9 で割り切れ，

$$n(n+1)=9k''\cdots\cdots⑤,\ (n+3)(n+4)=9l''\cdots\cdots⑥\ (k'' \text{ と } l'' \text{ は自然数})$$

n と $n+1$ は互いに素なので，⑤から，n，$n+1$ のいずれかが 9 の倍数である。

(i)　n が 9 の倍数のとき

互いに素な $n+3$ と $n+4$ はいずれも 9 の倍数ではなく，⑥は成立しない。

(ii)　$n+1$ が 9 の倍数のとき

互いに素な $n+3$ と $n+4$ はいずれも 9 の倍数ではなく，⑥は成立しない。

(i)(ii)より，d_n は 9 で割り切れない。

以上より，d_n は $8=2^3$ の倍数でない偶数であり，しかも 5 以上の素数 p および $9=3^2$ の倍数でないことから，d_n を素因数分解すると，

$$d_n=2^i\cdot 3^j\quad(1\leqq i\leqq 2,\ 0\leqq j\leqq 1)$$

これより，$d_n\leqq 2^2\cdot 3^1=12$ となる。

また，$d_n=12$ の場合は，a_n と a_{n+3} がともに 12 の倍数になり，その差をとると，

$$a_{n+3}-a_n=(n+3)(n+4)-n(n+1)=6n+12\cdots\cdots\cdots⑦$$

すると，⑦から $6n+12$ は 12 の倍数になることが必要なので，n が偶数の場合を小さい方から調べていくと，$n=8$ で，

$$a_8=8\cdot 9=2^3\cdot 3^2,\ a_{11}=11\cdot 12=2^2\cdot 3\cdot 11$$

よって，$d_n=12$ となる 1 つの n の値は $n=8$ である。

［解 説］

整数を題材にした論証問題です。(1)の役割は(4)への誘導で，証明自体は明らかといってもよいぐらいのものです。また, (2), (3), (4)は, 同じスタイルで記述しています。老いの繰り言のようですが。なお, (4)の冒頭の「d_n が 9 で割り切れない」という予測は，$d_n\leqq 12$ という結論より絞り込んだものです。

$\boxed{33}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

(1)　$\sqrt{n}$ の整数部分を a とおくと，$\sqrt{n}$ が整数でないことより，

$$a<\sqrt{n}<a+1\,,\ \ a^2<n<a^2+2a+1$$

すなわち，$n=a^2+k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2a)\cdots\cdots$①とおくことができる。

ここで，$\sqrt{n}$ の小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数なので，

$$a+\frac{1}{100}\leqq\sqrt{n}<a+\frac{1}{10}\,,\ \left(a+\frac{1}{100}\right)^2\leqq n<\left(a+\frac{1}{10}\right)^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\left(a+\frac{1}{100}\right)^2\leqq a^2+k<\left(a+\frac{1}{10}\right)^2$ となり，

$$\frac{a}{50}+\frac{1}{10000}\leqq k<\frac{a}{5}+\frac{1}{100}\cdots\cdots\cdots③$$

③を a について解くと，$\frac{a}{50}+\frac{1}{10000}\leqq k$ から $a\leqq 50k-\frac{1}{200}$，$k<\frac{a}{5}+\frac{1}{100}$ から $a>5k-\frac{1}{20}$ となるので，

$$5k-\frac{1}{20}<a\leqq 50k-\frac{1}{200}\cdots\cdots\cdots④$$

さて，a が最小となるのは $k=1$ のときで，④から $5-\frac{1}{20}<a\leqq 50-\frac{1}{200}$ なので，

$$a=5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 49$$

よって，条件に当てはまる最小の n は，$n=5^2+1=26$ である。

(2)　まず，$k=2$ のとき，④から $10-\frac{1}{20}<a\leqq 100-\frac{1}{200}$ なので，

$$a=10,\ 11,\ 12,\ \cdots,\ 99$$

また，$k=3$ のとき，④から $15-\frac{1}{20}<a\leqq 150-\frac{1}{200}$ なので，

$$a=15,\ 16,\ 17,\ \cdots,\ 149$$

さらに，$k\geqq 4$ のとき，④より $a\geqq 20$ となる。

以上より，条件に当てはまる n を小さい方から並べていくと，

$$5^2+1,\ 6^2+1,\ 7^2+1,\ 8^2+1,\ 9^2+1,\ 10^2+1,\ 10^2+2,\ 11^2+1,\ 11^2+2,$$
$$12^2+1,\ 12^2+2,\ \cdots\cdots$$

すると，10 番目に小さいものは，$12^2+1=145$ になる。

［解　説］

おもしろい整数問題です。条件を満たす n が「平方数＋ちょっと」というのは感覚的にもわかりますが，その「ちょっと」を数式で評価することがポイントです。具体的には，③すなわち④ですが。

34　　［神戸大］

(1)　1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる周期 3 の数列$\{a_n\}$に対し，この初項から第n項までの和をS_nとする。ここで，$S_3=8$に注意して，lを 0 以上の整数とすると，

(i)　$n=3l+1$のとき　$S_{3l+1}=8l+1$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-1}{3}+1=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{5}{3}$

(ii)　$n=3l+2$のとき　$S_{3l+2}=8l+4$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-2}{3}+4=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{4}{3}$

(iii)　$n=3l+3$のとき　$S_{3l+3}=8(l+1)$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-3}{3}+8=\dfrac{8}{3}n$

(2)　$2019=8\times252+3$なので，以下$\mathrm{mod}\,8$で記すと，$2019\equiv3$である。

さて，(1)から，$n=3l+1$のとき$S_n\equiv1$，$n=3l+2$のとき$S_n\equiv4$，$n=3l+3$のとき$S_n\equiv0$である。

これより，$S_n=2019$となる自然数nは存在しない。

(3)　まず，任意の自然数kに対して，kとk^2を 8 で割った余りについて表にまとめると，右のようになり，

$$k^2\equiv0,\ 1,\ 4\pmod 8$$

k	k^2
0	0
1	1
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4
7	1

また，(1)より，lを任意の 0 以上の整数とするとき，

$$S_{3l+1}=8l+1,\ S_{3l+2}=8l+4,\ S_{3l+3}=8(l+1)$$

すなわち，S_nは，8 で割ったときの余りが，1，4，0 であるすべての自然数を表す。

以上より，どのような自然数kに対しても，$S_n=k^2$となる自然数nが存在する。

［解　説］

周期数列が題材の整数問題です。(2)は 3 つの場合について方程式を立ててもよいのですが，(3)との関連も考え，8 で割った余りに着目して処理をしています。

$\boxed{35}$ ［一橋大］

p を自然数とし，数列$\{a_n\}$に対して，$a_1=1$，$a_2=p^2$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+13$ から，

$$a_3=a_2-a_1+13=p^2-1+13=p^2+12$$

(i)　$p=1$ のとき　$a_3=13$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(ii)　$p=2$ のとき　$a_3=16$，$a_4=16-4+13=25$，$a_5=25-16+13=22$

これより，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(iii)　$p=3$ のとき　$a_3=21$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(iv)　$p=4$ のとき　$a_3=28$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(v)　$p=5$ のとき　$a_3=37$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(vi)　$p\geqq 6$ のとき　$12<2p+1$ なので，$p^2+12<p^2+2p+1=(p+1)^2$ となり，

$$p^2<a_3<(p+1)^2$$

これより，a_3 は平方数でなく，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(i)～(vi)より，数列$\{a_n\}$には平方数でない項が存在する。

［解 説］

整数と漸化式の融合問題です。$a_3=p^2+12$ という式をみて，不等式 $a_3<(p+1)^2$ を解いた結果，方針が決まりました。

36　　　　［千葉大・理］

(1)　$a_1=3$，$a_2=2$，$a_{n+1}=a_n{}^2+a_n-1\ (n\geqq 2)$ ……①で定められる$\{a_n\}$に対して，

$$a_{n+1}+1=a_n(a_n+1)\quad (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$n\geqq 2$において，

$$a_{n+1}+1=(a_2+1)a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=3\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$$

よって，$a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ ……③が成り立つ。

(2)　$n\geqq 2$のとき，①より，$a_n{}^2=a_{n+1}-a_n+1$となり，③を利用すると，

$$\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=a_1{}^2+\sum_{i=2}^{n}a_i{}^2=3^2+\sum_{i=2}^{n}(a_{i+1}-a_i+1)=9+a_{n+1}-a_2+(n-1)$$

$$=9+(a_1a_2\cdots a_n-1)-2+n-1=a_1a_2\cdots a_n+n+5$$

ここで，条件より，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$ ……④なので，

$$a_1a_2\cdots a_n+n+5=a_1a_2\cdots a_n+100,\quad n+5=100$$

よって，$n=95$となり，この値は$n\geqq 2$を満たしている。

なお，$n=1$のとき，条件④は$3^2=3+100$となり，成立しない。

［解 説］

少しスパイスの効いた漸化式が対象です。(1)は数学的帰納法でも示せますが，結論をみて②という変形をしています。解法の詳細は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

37　　［北海道大・文］

(1)　各項が 1 または 2 の有限数列について，すべての項の和が n となるものの個数を s_n とする。

このとき，$n=3$ すなわち項の和が 3 となる数列には，2 項からなる数列 1，2 と 2，1，および 3 項からなる 1，1，1 があるので，これより $s_3=3$ である。

(2)　すべての項の和が n となる数列の個数 s_n について，$n\geqq 3$ のとき，

(i)　初項が 1 のとき

第 2 項から第 n 項までの和が $n-1$ より，s_{n-1} 個の数列がある。

(ii)　初項が 2 のとき

第 2 項から第 n 項までの和が $n-2$ より，s_{n-2} 個の数列がある。

(i)(ii)より，$s_n=s_{n-1}+s_{n-2}$ ………①

(3)　まず，$s_n-\alpha s_{n-1}=\beta(s_{n-1}-\alpha s_{n-2})$ ……②から，$s_n=(\alpha+\beta)s_{n-1}-\alpha\beta s_{n-2}$

すると，①から $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ となり，$(\alpha,\ \beta)$ は 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解なので，1 組求めると，

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

(4)　②より，$s_{n+2}-\alpha s_{n+1}=\beta(s_{n+1}-\alpha s_n)\ (n\geqq 1)$ となり，

$$s_{n+1}-\alpha s_n=(s_2-\alpha s_1)\beta^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

同様に，$s_{n+2}-\beta s_{n+1}=\alpha(s_{n+1}-\beta s_n)\ (n\geqq 1)$ から，

$$s_{n+1}-\beta s_n=(s_2-\beta s_1)\alpha^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

③－④より，$(\beta-\alpha)s_n=(s_2-\alpha s_1)\beta^{n-1}-(s_2-\beta s_1)\alpha^{n-1}$ ………⑤

ここで，$s_1=1$，$s_2=2$ から，$s_2-\alpha s_1=2-\alpha=2-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=\beta^2$

$$s_2-\beta s_1=2-\beta=2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\alpha^2$$

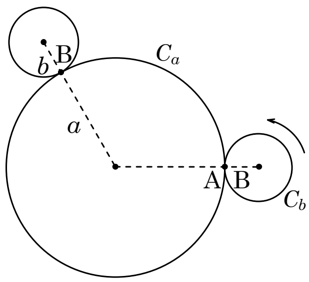
⑤より，$(\beta-\alpha)s_n=\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}$ となり，$s_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$

［解　説］

漸化式の応用問題です。(2)の関係を求めるところがポイントですが，隣接 3 項間型の場合は，原則的に最初か最後に着目するので，ここでは前者で解答例を書きました。

38　　　　　　　　　　　　　　　　［新潟大・医］

(1)　まず，半径が a の円 C_a 上に点 A，半径が b の円 C_b 上に点 B をとる。はじめに点 A と点 B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。そして，点 B が点 A に再び一致するとき，C_b は m 周期回転し，同時に C_a のまわりを n 回転したとすると，



$$2\pi b\cdot m = 2\pi a\cdot n\,,\ \ bm = an\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$a,\ b$ が自然数なので，$g=\gcd(a,\ b)$ として，$a=ga'$，$b=gb'$ とおくと，a' と b' は互いに素となり，①より，

$$gb'm = ga'n\,,\ \ b'm = a'n$$

すると，m は a' の倍数となり，その最小数は $m=a'=\dfrac{a}{g}=\dfrac{a}{\gcd(a,\ b)}$ である。

(2)　$a,\ b$ が正の有理数のとき，既約分数で $a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$ とおくと，①より，

$$\frac{s}{t}m=\frac{p}{q}n\,,\ \ qsm = ptn\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$g_1=\gcd(p,\ s)$，$g_2=\gcd(q,\ t)$ とおくと，

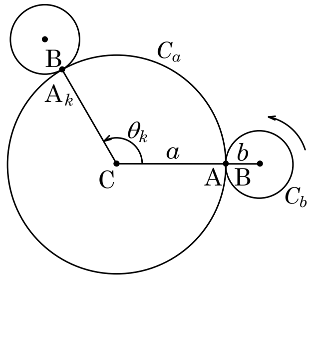
$$p=g_1p'\,,\ \ s=g_1s'\,,\ \ q=g_2q'\,,\ \ t=g_2t'$$

そして，p' と s' は互いに素，q' と t' は互いに素となり，②より，

$$g_1g_2q's'm = g_1g_2p't'n\,,\ \ q's'm = p't'n$$

すると，p' と q' も互いに素，s' と t' も互いに素なので，m は $p't'$ の倍数となり，その最小数は $m=p't'=\dfrac{pt}{g_1g_2}=\dfrac{pt}{\gcd(p,\ s)\cdot\gcd(q,\ t)}$ である。

(3)　$a,\ b$ が互いに素な自然数の場合，点 B が点 A に再び一致するとき，(1)より，C_b は a 周期回転し，同時に C_a のまわりを b 回転している。



ここで，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ として，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とし，CA から測った CA_k への角を θ_k とおくと，

$$2\pi b\cdot k = a\theta_k\,,\ \ \theta_k = 2\pi\cdot\frac{bk}{a}$$

さて，$bk\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ a)$ を a で割った商を q_k，余りを r_k とおくと，$bk = aq_k + r_k\ (0\leqq r_k\leqq a-1)$ となり，

$$\theta_k = 2\pi\cdot\frac{aq_k+r_k}{a} = 2\pi q_k + 2\pi\cdot\frac{r_k}{a}\ \cdots\cdots\cdots③$$

このとき，$1\leqq i<j\leqq a$ において，$r_i=r_j$ と仮定すると，

$$b(j-i) = a(q_j-q_i)+(r_k-r_j) = a(q_j-q_i)$$

すると，$j-i$ は a の倍数となるが，$1\leqq j-i\leqq a-1$ より不適である。

よって，$1\leqq i<j\leqq a$ のとき，$r_i\neq r_j$ となり，これより，

$$\{r_1,\ r_1,\ \cdots,\ r_a\}=\{0,\ 1,\ \cdots,\ a-1\}$$

したがって，③から，$\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分する。

［解 説］

図形の絡んだ整数問題です。題材は有名な外サイクロイドです。ただ，(3)の後半の余りでの評価は，経験がないと難しいでしょう。