$\boxed{14}$ ［神戸大］

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ を満たす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ。

(3) 点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ。ただし，$0<\angle\mathrm{ABG}<\pi$ とする。

$\boxed{15}$ ［名古屋大・理］

空間内に$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B，C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれB'，C'とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}+\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=0$を示せ。

(2) $\angle\mathrm{B}'\mathrm{AC}'>\dfrac{\pi}{2}$を示せ。

(3) P 上の三角形$\mathrm{AB}'\mathrm{C}'$の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。

16　　［大阪大］

座標空間内の 2 つの球面

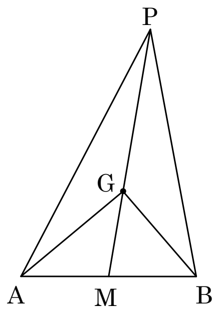
$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7 \text{ と } S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える。S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。

14　　［神戸大］



(1)　△PAB の AB の中点 M に対し，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PAB に余弦定理を適用すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ から，

$$4=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\dfrac{1}{4}(2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+1\cdots\cdots\cdots③$$

(2)　$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，△GAB は斜辺が AB＝2 の直角三角形より，

$$\mathrm{MG}=\mathrm{MA}=\mathrm{MB}=1$$

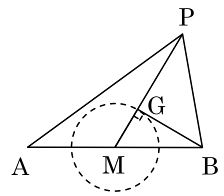
点 G は△PAB の重心なので，PM＝3GM＝3 となり，③から，

$$9=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+1,\ \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=8$$

(3)　△PAB において，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，③から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4},\ |\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=\frac{3}{2}$$

すると，$\mathrm{GM}=\dfrac{1}{3}\mathrm{PM}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ となり，点 G は点 M を中心として，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く。



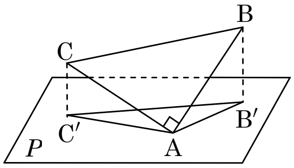
これより，∠ABG が最大になるのは，右図のように，BG がこの円に接するときである。このとき，MB＝1，$\mathrm{MG}=\dfrac{1}{2}$ から $\sin\angle\mathrm{ABG}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{ABG}=\dfrac{\pi}{6}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。この問題にはいろいろな解法があり，たとえば，(1)では中線定理の利用，(2)では $\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}=0$ を変形する方法，(3)では座標系の設定などが考えられます。

15　［名古屋大・理］

(1)　空間内に$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，P 上にない点 B, C から P に垂線を下ろし，P との交点をそれぞれ B'，C' とすると，



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$に注意して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC'}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$$
$$=2\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$$

すると，線分 BB' と CC' はともに平面 P に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BB'}}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$ ……(＊)である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{C'C}}$ は同じ向きに平行なので，$k>0$ として $\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=k\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$ とおくことができる。すると，(＊)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=-\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=-k\left|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\right|^2<0$$

これより，$\cos\angle\mathrm{B'AC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\right|}<0$ となり，$\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$ である。

(3)　3 辺の長さが 4，$\sqrt{21}$，7 である$\triangle\mathrm{AB'C'}$は，$\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$ から最長辺 $\mathrm{B'C'}=7$ であり，また一般性を失うことなく $\mathrm{AB'}=4$，$\mathrm{AC'}=\sqrt{21}$ とすることができるので，

$$7^2=4^2+21-2\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\frac{16+21-49}{2}=-6$$

すると，(＊)から，$\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=-(-6)=6$ となり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{C'C}}\right|=6$

さて，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=l$ とおくと，$\mathrm{B'B}=\sqrt{l^2-16}$，$\mathrm{C'C}=\sqrt{l^2-21}$ となり，

$$\sqrt{l^2-16}\cdot\sqrt{l^2-21}=6,\ \ (l^2-16)(l^2-21)=36$$

これより，$l^4-37l^2+300=0$ となり，$(l^2-25)(l^2-12)=0$

ここで，$l^2>16$ かつ $l^2>21$ なので $l^2=25$ となり，$\mathrm{AB}=l=5$ である。

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。(1)が(2)へ，そして(1)と(2)が(3)へと，うまく繋がっています。

16　　［大阪大］

(1)　球面 $S_1:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$ ……①は中心 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$ で半径 $\sqrt{7}$，球面 $S_2:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$ ……②は中心 $\mathrm{B}(2,\ 3,\ 3)$ で半径 1 である。

すると，$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2}=3$ であり，

$$\sqrt{7}-1<\mathrm{AB}<\sqrt{7}+1$$

よって，S_1 と S_2 は交わり，その共通部分 C は円となる。

この円 C を含む平面 π は，①－②から，$(2x-3)+2(2y-4)+2(2z-4)=6$

$$2x+4y+4z=25 \text{………③}$$

また，直線 AB は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 2,\ 2)$ から，t を実数として，

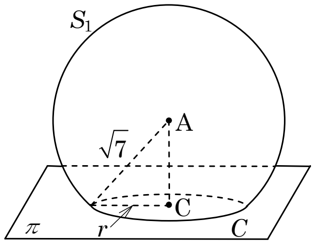
$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)+t(1,\ 2,\ 2) \text{………④}$$

円 C の中心 C は，平面 π と直線 AB との交点なので，④を③に代入し，

$$2(1+t)+4(1+2t)+4(1+2t)=25,\ 18t+10=25$$

よって，$t=\dfrac{5}{6}$ より，中心の座標は $\mathrm{C}\left(\dfrac{11}{6},\ \dfrac{8}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$ となり，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{5}{6}\sqrt{1+4+4}=\frac{5}{2}$$



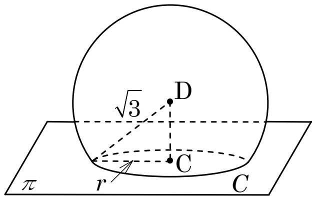
これより，円 C の半径 r は，

$$r=\sqrt{(\sqrt{7})^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，円 C を含む球面で半径が最小となるものは，円 C が大円になる球面なので，その方程式は，

$$\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{3}{4}$$

(2)　円 C を含み，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の中心を D とおくと，$\mathrm{DC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}$ ……⑤となる。



また，点 D は直線 AB 上の点なので，④から $\mathrm{D}(1+t,\ 1+2t,\ 1+2t)$ とおけ，

$$\mathrm{DC}=\sqrt{\left(1+t-\frac{11}{6}\right)^2+\left(1+2t-\frac{8}{3}\right)^2+\left(1+2t-\frac{8}{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(t-\frac{5}{6}\right)^2+2\left(2t-\frac{5}{3}\right)^2} \text{………⑥}$$

すると，⑤⑥から，$\left(t-\dfrac{5}{6}\right)^2+2\left(2t-\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{9}{4}$ となり，

$$9t^2-15t+4=0,\ (3t-1)(3t-4)=0$$

よって，$t=\dfrac{1}{3}$ のとき $\mathrm{D}\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$，$t=\dfrac{4}{3}$ のとき $\mathrm{D}\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$ なので，求める

球面の方程式は，

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3,\ \left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3$$

［解 説］

交わる 2 つの球面を題材にした問題で，以前は超頻出だったものです。いろいろな解法がありますが，平面の方程式がほぼ「常識化」したという背景も考え，解答例では 2 つの球面の交線を含む平面に注目しています。