$\boxed{18}$ ［神戸大］

媒介変数表示 $x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t$　$(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(2) C の凹凸を調べ，C の概形を描け。

(3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

$\boxed{19}$ ［岡山大］

座標平面において線分 $L: y=x\ (0 \leqq x \leqq 1)$，曲線 $C: y=x^2-x+1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ および y 軸で囲まれた図形を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t+1)$ から L に下ろした垂線と L の交点を Q とする。線分 OQ の長さ u を t で表せ。ただし O は原点とする。

(2) (1)の P, Q について線分 PQ の長さを t を用いて表せ。

(3) 図形 D を直線 $y=x$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

20　［東京医歯大］

a と b を実数として，xy 平面において，2 つの曲線

$$C_1 : y = x^4 - x^2,\ C_2 : y = a(x^2 - 1)$$

および直線 $l : y = b$ を考える。ただし C_1 と l は相異なる 4 点で交わるとする。また C_1 と C_2 は $0 < x_0 < 1$ となる交点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ をひとつもつとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。また x_0，y_0 を a を用いて表せ。

(2)　b のとりうる値の範囲を求めよ。また C_1 と l の交点の x 座標を b を用いて表せ。

(3)　C_1 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とする。V_1 を b を用いて表せ。

(4)　$b = y_0$ として，C_2 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq y_0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。$3V_1 = V_2$ のとき，a の値を求めよ。

21　　　　［名古屋大］

正の整数 n に対し，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}$ とする。

(1)　I_1 を求めよ。必要ならば $\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3)　xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。D を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を C とする。C を平面 $x=\frac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき，小さい方を S とする。z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

18　　［神戸大］

(1)　曲線 C: $x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t$　$(0\leqq t\leqq\pi)$ に対して，

$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\ \frac{dy}{dt}=-\sin^2 t+(1+\cos t)\cos t=2\cos^2 t+\cos t-1$$

これより，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos^2 t+\cos t-1}{\cos t}$ となり，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}$ から，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-4\cos t\sin t-\sin t)\cos t-(2\cos^2 t+\cos t-1)(-\sin t)}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}$$

$$=\frac{-2\cos^2 t\sin t-\sin t}{\cos^3 t}=\frac{-\sin t(2\cos^2 t+1)}{\cos^3 t}$$

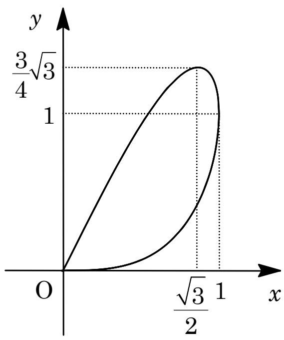
(2)　(1)から，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ なので C は上に凸，$\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ なので C は下に凸である。

また $\dfrac{dy}{dt}=(2\cos t-1)(\cos t+1)$ に注意して，$0\leqq t\leqq\pi$ における x, y の増減を調べると，右表のようになる。さらに $\dfrac{dy}{dx}$ について，

$$\lim_{t\to+0}\frac{dy}{dx}=2,\ \lim_{t\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=0$$

以上より，C の概形は右下図のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	1	$+$		$+$	0	$-$	-1
x	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	2	$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	↘	1	↘	0



(3)　まず，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y=y_1(x)$，$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ のとき $y=y_2(x)$ とおくと，C で囲まれる領域の面積 S は，

$$S=\int_0^1\{y_1(x)-y_2(x)\}dx$$

$$=\int_0^1 y_1(x)dx-\int_0^1 y_2(x)dx$$

ここで，変数を x から t に置き換えて積分すると，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\sin t\cdot\cos t\,dt-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\sin t\cdot\cos t\,dt$$

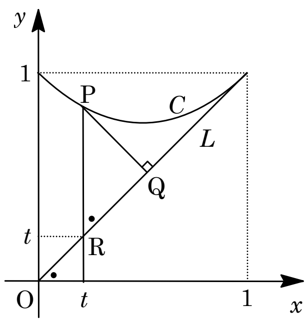
$$=\int_0^{\pi}(\cos t+\cos^2 t)\sin t\,dt=\Big[-\frac{1}{2}\cos^2 t-\frac{1}{3}\cos^3 t\Big]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$$

［解　説］

パラメータ曲線で囲まれる領域の面積を求める頻出題です。計算はやや多めです。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［岡山大］

(1)　曲線 $C: y = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2 - t + 1)$ から，線分 $L: y = x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ に下ろした垂線と L の交点を Q，P から x 軸に下ろした垂線と L との交点を R とする。



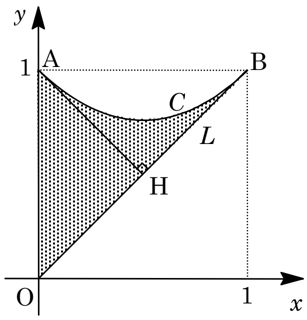
このとき，L と x 軸の正の向きとのなす角が 45° より，

$$u = \mathrm{OQ} = \mathrm{OR} + \mathrm{RQ}$$
$$= \frac{t}{\cos 45^\circ} + \{(t^2 - t + 1) - t\}\cos 45^\circ$$
$$= \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}(t^2 - 2t + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(t^2 + 1)$$

(2)　$\mathrm{PQ} = \mathrm{RQ}\tan 45^\circ = \mathrm{RQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}(t^2 - 2t + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(t - 1)^2$

(3)　A$(0,\ 1)$，B$(1,\ 1)$ とし，A から L に下ろした垂線と L との交点を H とすると，$\mathrm{H}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ となり，

$$\mathrm{OH} = \mathrm{AH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



さて，図形 D を直線 $y = x$ のまわりに 1 回転してできる立体のうち，△AHO を回転した円錐の体積を V_1，図形 AHB を回転した立体の体積を V_2 とすると，

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi\,,\ \ V_2 = \pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{PQ}^2\, du$$

ここで，(1)より $du = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2t\,dt = \sqrt{2}t\,dt$ となり，$u = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \sqrt{2}$ は $t = 0 \to 1$ から，

$$V_2 = \pi\int_0^1 \frac{1}{2}(t-1)^4 \cdot \sqrt{2}t\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^1 t(t-1)^4\,dt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left\{\frac{1}{5}\Big[\,t(t-1)^5\,\Big]_0^1 - \frac{1}{5}\int_0^1 (t-1)^5\,dt\right\} = -\frac{\sqrt{2}}{10}\pi\cdot\frac{1}{6}\Big[\,(t-1)^6\,\Big]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

よって，求める立体の体積は，$V_1 + V_2 = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi + \frac{\sqrt{2}}{60}\pi = \frac{\sqrt{2}}{10}\pi$ である。

［解　説］

斜回転体の体積を求める典型的な問題です。誘導が詳しく付いているので，方針を誤ることはないでしょう。

$\boxed{20}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京医歯大］

(1)　$C_1 : y = x^4 - x^2$ ……①，$C_2 : y = a(x^2-1)$ ……②，$l : y = b$ ……③に対し，①と②を連立すると，$x^4 - x^2 = a(x^2-1)$ となり，

$$x^2(x+1)(x-1) = a(x+1)(x-1),\ (x+1)(x-1)(x^2-a) = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，C_1 と C_2 が $0 < x_0 < 1$ となる交点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ をひとつもつ条件は，

(i)　$a = 0$ のとき　④の実数解は $x = 0,\ \pm 1$ より不適。

(ii)　$a < 0$ のとき　④の実数解は $x = \pm 1$ より不適。

(iii)　$a > 0$ のとき　④の実数解は $x = \pm 1,\ \pm\sqrt{a}$ となり，$0 < \sqrt{a} < 1$ から $0 < a < 1$

(i)〜(iii)より，求める条件は $0 < a < 1$ であり，このとき $(x_0,\ y_0) = (\sqrt{a},\ a^2 - a)$

(2)　①は偶関数なので，C_1 は y 軸対称になり，

$$y' = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2-1)$$

すると，$x \geqq 0$ での増減は右表のようになり，$x < 0$ の範囲も合わせて考えると，C_1 と l が相異なる 4 点で交わる条件は，$-\dfrac{1}{4} < b < 0$ である。

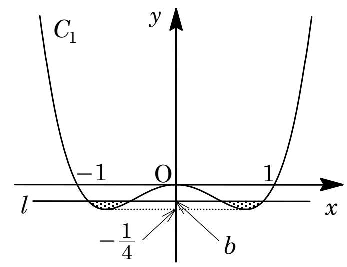
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	0	$-$	0	$+$
y	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

このとき，C_1 と l の交点の x 座標は，①と③を連立して，$x^4 - x^2 = b$ より，

$$x^4 - x^2 - b = 0,\ x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}$$

よって，$x = \sqrt{\dfrac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}},\ -\sqrt{\dfrac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}}$ となる。

(3)　C_1 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体について，$y = t$ $\left(-\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq b\right)$ における断面積は，(2)を利用して，



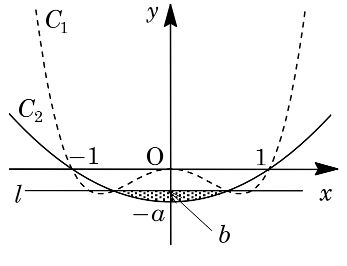
$$\pi\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} - \frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}\right) = \pi\sqrt{1+4t}$$

これより，この立体の体積 V_1 は，

$$V_1 = \pi\int_{-\frac{1}{4}}^{b} \sqrt{1+4t}\,dt = \pi\Big[\frac{2}{3}(1+4t)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4}\Big]_{-\frac{1}{4}}^{b} = \frac{\pi}{6}(1+4b)^{\frac{3}{2}} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(4)　$b = y_0 = a^2 - a$ のとき，C_2 と $y = t$ との交点の x 座標は，②より $a(x^2-1) = t$ となり，

$$x^2 = \frac{t+a}{a},\ x = \pm\sqrt{\frac{t+a}{a}}$$



すると，C_2 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体について，$y = t\ (-a \leqq t \leqq b)$ における断面積は $\pi \cdot \dfrac{t+a}{a}$ となるので，この立体の体積 V_2 は，

$$V_2=\pi\int_{-a}^{b}\frac{t+a}{a}dt=\frac{\pi}{a}\Big[\,\frac{1}{2}(t+a)^2\,\Big]_{-a}^{b}=\frac{\pi}{2a}(b+a)^2\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$b=a^2-a$ を代入すると，⑤⑥より，

$$V_1=\frac{\pi}{6}(1+4a^2-4a)^{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{6}\{(2a-1)^2\}^{\frac{3}{2}},\ V_2=\frac{\pi}{2a}(a^2-a+a)^2=\frac{\pi}{2}a^3$$

さて，条件より，$3V_1=V_2$ なので，

(i)　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき

$3\cdot\dfrac{\pi}{6}(1-2a)^3=\dfrac{\pi}{2}a^3$ より $1-2a=a$ となり，$a=\dfrac{1}{3}$ で適する。

(ii)　$\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ のとき

$3\cdot\dfrac{\pi}{6}(2a-1)^3=\dfrac{\pi}{2}a^3$ より $2a-1=a$ となり，$a=1$ で適さない。

(i)(ii)より，求める a の値は，$a=\dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

回転体の体積を求める問題です。ただ，与えられた曲線がどちらも y 軸対称であるため，複雑な構図ではありません。なお，最後の詰めは要注意です。

$\boxed{21}$　　　　［名古屋大］

(1)　$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta$

$=\frac{1}{2}\Big[\log|1+\sin\theta|-\log|1-\sin\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\Big[\log\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\log(2+\sqrt{3})$ ………①

(2)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}d\theta$

$=\Big[\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-(-n+2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\cdot\frac{-\sin\theta}{\cos^{n-1}\theta}d\theta$

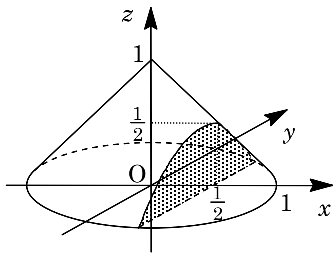
$=\sqrt{3}\cdot2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^n\theta}d\theta=\sqrt{3}\cdot2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^n\theta}d\theta$

$=\sqrt{3}\cdot2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}\right)d\theta=\sqrt{3}\cdot2^{n-2}-(n-2)(I_n-I_{n-2})$

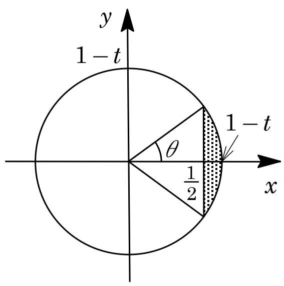
すると，$(1+n-2)I_n=\sqrt{3}\cdot2^{n-2}+(n-2)I_{n-2}$ となり，

$I_n=\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\frac{\sqrt{3}}{n-1}\cdot2^{n-2}$ ………②

(3)　xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐 C の $x\geqq\frac{1}{2}$ の部分 S を，平面 $z=t\ \left(0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\right)$ で切断したとき，その切り口は点 $(0,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 $1-t$ の円板の $x\geqq\frac{1}{2}$ の部分になる。



そして，右図の網点部で表される切り口について，θ を $(1-t)\cos\theta=\frac{1}{2}$ で設定し，切り口の面積を $T(t)$ とおくと，



$T(t)=2\left\{\frac{1}{2}(1-t)^2\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-t)\sin\theta\right\}$

$=(1-t)^2\theta-\frac{1}{2}(1-t)\sin\theta=\frac{\theta}{4\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}$

すると，求める S の体積 V は，

$V=\int_0^{\frac{1}{2}}T(t)dt$

ここで，$t=1-\frac{1}{2\cos\theta}$ から $dt=-\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}d\theta$ となり，また $t=0\to\frac{1}{2}$ のとき $\theta=\frac{\pi}{3}\to0$ であるので，

$$V=-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left(\frac{\theta}{4\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\right)d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)d\theta=I_3-I_1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta=\left[\frac{\theta}{3\cos^3\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta=\frac{8}{9}\pi-\frac{1}{3}I_3$$

すると，①②を利用して，

$$V=\frac{1}{8}\left(\frac{8}{9}\pi-\frac{1}{3}I_3-I_3+I_1\right)=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{6}I_3+\frac{1}{8}I_1=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}I_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\right)+\frac{1}{8}I_1$$

$$=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{24}I_1=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{24}\log(2+\sqrt{3})$$

［解　説］

立体の体積計算についての有名問題です。(1)(2)の定積分を誘導として考えると，中心角を設定して，切り口の弓形の面積を求めるという流れが見えてきます。計算はやや面倒ですが。