20　　　　［金沢大］

k を正の定数とする。2 次方程式 $z^2-2kz+1=0$ が虚数解をもつとし，虚部が正の虚数解を α とする。次の問いに答えよ。

(1) k の値の範囲を求めよ。また，$|\alpha|$ を求めよ。

(2) $\cos\dfrac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。

(3) 複素数平面において，α^3 が第 3 象限にあり，かつ α^6 が第 1 象限にあるときの α の偏角 $\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ と k の値の範囲を求めよ。ただし，座標軸の点は，どの象限にも属さない。

(4) (3)において求めた範囲に α があるとき，$|1-\alpha^5|$ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{21}$ ［筑波大］

$|z|^2+3=2(z+\overline{z})$ を満たす複素数 z 全体の集合を A とする。ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数である。

(1) 集合 A を複素数平面上に図示せよ。

(2) A の要素 z の偏角を θ とする。ただし $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。z が A を動くとき，θ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) z^{60} が正の実数となる A の要素 z の個数を求めよ。

22 ［長崎大］

方程式$z^3=1$の解をz_1，z_2，z_3とし，$0 \leqq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$とする。複素数平面上に 3 点$\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$をとるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$z_1+z_2+z_3$，$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$，$z_1z_2z_3$の値をそれぞれ求めよ。

(2)　複素数平面上の点$\mathrm{P}(\alpha)$について，線分の長さの 2 乗の和$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$および線分の長さの積$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$の値を，$\alpha$を用いてそれぞれ表せ。

(3)　複素数平面上の点$\mathrm{P}(\alpha)$について，αが$\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=ri$ $(r>0)$を満たすとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$の最大値，およびそのときの$r$と$\alpha$の値を求めよ。ただし，$i$は虚数単位である。

(4)　(3)において，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$が最大になるときの$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$の値を求めよ。

$\boxed{23}$ ［九州大］

a, b を複素数, c を純虚数でない複素数とし, i を虚数単位とする。複素数平面において, 点 z が虚軸全体を動くとき

$$w=\frac{az+b}{cz+1}$$

で定める点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア)　$z=i$ のときに $w=i$ となり, $z=-i$ のときに $w=-i$ となる。

(イ)　C は単位円の周に含まれる。

(ウ)　点 -1 は C に属さない。

このとき a, b, c の値を求めよ。さらに C を求め, 複素数平面上に図示せよ。

20　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大］

(1)　2 次方程式 $z^2-2kz+1=0\ (k>0)$ ……①が，虚数解 α，$\overline{\alpha}$ をもつことより，

$$D/4=k^2-1=(k+1)(k-1)<0$$

すると，$k>0$ から，$0<k<1$ である。

また，解と係数の関係から $\alpha\overline{\alpha}=1$ すなわち $|\alpha|^2=1$ となり，$|\alpha|=1$ である。

(2)　$\cos\dfrac{5}{12}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3)　$\arg\alpha=\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とすると，(1)より，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ となる。

まず，α の虚部は正から $0<\theta<\pi$ ……②となる。

また，$\arg\alpha^3=3\theta$ から②より $0<3\theta<3\pi$ となり，α^3 が第 3 象限にあるので，

$$\pi<3\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\arg\alpha^6=6\theta$ から③より $2\pi<6\theta<3\pi$ となり，α^6 が第 1 象限にあるので，

$$2\pi<6\theta<\frac{5}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{12}\pi\ \cdots\cdots\cdots④$$

次に，解と係数の関係から $\alpha+\overline{\alpha}=2k$ すなわち $k=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$ となり，k は α の実部である。よって，$k=\cos\theta$ なので，④と(2)の結果から，

$$\cos\frac{5}{12}\pi<k<\cos\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<k<\frac{1}{2}$$

(4)　$1-\alpha^5=1-(\cos5\theta+i\sin5\theta)=(1-\cos5\theta)-i\sin5\theta$ なので，

$$|1-\alpha^5|^2=(1-\cos5\theta)^2+(-\sin5\theta)^2=2-2\cos5\theta=2(1-\cos5\theta)$$

ここで，④より $\dfrac{5}{3}\pi<5\theta<\dfrac{25}{12}\pi$ となり，$\cos\dfrac{5}{3}\pi=\cos\dfrac{\pi}{3}<\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\dfrac{25}{12}\pi$ より，

$$\cos\frac{5}{3}\pi<\cos5\theta\leqq\cos2\pi,\ \frac{1}{2}<\cos5\theta\leqq1$$

すると，$0\leqq|1-\alpha^5|^2<1$ となるので，$0\leqq|1-\alpha^5|<1$ である。

［解　説］

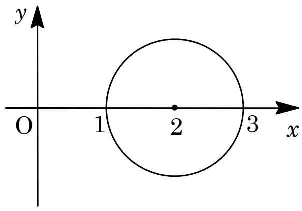
ド・モアブルの定理が絡んだ複素数と方程式についての問題です。設問は多いですが，誘導がていねいなため，計算が止まることはないでしょう。

$\boxed{21}$ ［筑波大］

(1) 複素数 z に対して，$|z|^2+3=2(z+\bar{z})$ より，

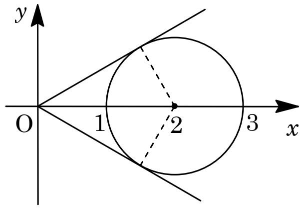
$$|z|^2-2(z+\bar{z})+3=0,\ (z-2)(\bar{z}-2)=1$$

よって，$|z-2|^2=1$ より $|z-2|=1$ となり，z 全体の集合 A は，点 2 を中心とする半径 1 の円である。複素数平面上に図示すると，右図のようになる。



(2) 集合 A に原点から接線を引いたとき，その 2 本の接線と実軸の正の向きとのなす角は $\pm\dfrac{\pi}{6}$ である。

これより，z の偏角を $\theta\ (-\pi<\theta\leqq\pi)$ とすると，右図より，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ である。



(3) z^{60} の偏角は 60θ となり，(2)より $-10\pi\leqq 60\theta\leqq 10\pi$ である。

すると，z^{60} が正の実数となるとき，$60\theta=2n\pi\ (-5\leqq n\leqq 5)$ と表せる。

(i) $60\theta=0$ のとき　$\theta=0$ より $z=1,\ 3$ となり，z は 2 個存在する。

(ii) $60\theta=\pm 2\pi$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{\pi}{30}$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(iii) $60\theta=\pm 4\pi$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{\pi}{15}$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(iv) $60\theta=\pm 6\pi$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{\pi}{10}$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(v) $60\theta=\pm 8\pi$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{2}{15}\pi$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(vi) $60\theta=\pm 10\pi$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{\pi}{6}$ より，z は $1+1=2$ 個存在する。

(i)～(vi)より，求める z の個数は，$2+4\times 4+2=20$ である。

［解　説］

複素数平面上の円を題材とした問題です。(1)の共役複素数を用いた変形は，必修事項の 1 つです。

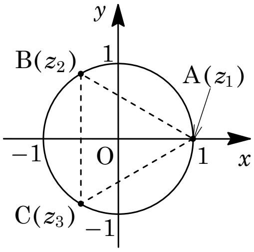
22　　［長崎大］

(1)　方程式 $z^3=1\ (z^3-1=0)$ の解を z_1，z_2，z_3 とすると，解と係数の関係より，

$$z_1+z_2+z_3=0\,,\ z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0\,,\ z_1z_2z_3=1$$

(2)　$0\leqq\arg z_1<\arg z_2<\arg z_3<2\pi$ より，$z_1=1$

$$z_2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\,,\ z_3=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$$

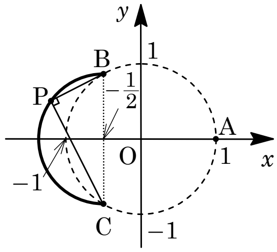


ここで，3 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ をとり，複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，(1)より，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=|z_1-\alpha|^2+|z_2-\alpha|^2+|z_3-\alpha|^2$$
$$=(z_1-\alpha)(\overline{z_1}-\overline{\alpha})+(z_2-\alpha)(\overline{z_2}-\overline{\alpha})+(z_3-\alpha)(\overline{z_3}-\overline{\alpha})$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2-\overline{\alpha}(z_1+z_2+z_3)-\alpha(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})+3|\alpha|^2$$
$$=1+1+1-\overline{\alpha}(z_1+z_2+z_3)-\alpha(\overline{z_1+z_2+z_3})+3|\alpha|^2=3+3|\alpha|^2\ \cdots\cdots\cdots①$$
$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}=|z_1-\alpha||z_2-\alpha||z_3-\alpha|=|(z_1-\alpha)(z_2-\alpha)(z_3-\alpha)|$$
$$=|z_1z_2z_3-(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\alpha+(z_1+z_2+z_3)\alpha^2-\alpha^3|=|1-\alpha^3|\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　α が $\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=ri\ (r>0)$ を満たすとき，

$$\frac{|z_2-\alpha|}{|z_3-\alpha|}=r\,,\ \arg\frac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=\frac{\pi}{2}$$



すると，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転し r 倍したものになる。

これより右図のように，点 P は線分 BC が直径，すなわち中心 $-\dfrac{1}{2}$ で半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の半円上（太線部）にある。ただし，点 B，点 C は除く。

そして，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ が最大となるのは，①より $|\alpha|$ が最大となるときで，これは点 P が半円と実軸との交点 $\left(\alpha=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ のときに対応し，その最大値は，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=3+3\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2=3+\frac{3}{2}(2+\sqrt{3})=\frac{12+3\sqrt{3}}{2}$$

このとき，$\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$ から $|z_2-\alpha|=|z_3-\alpha|$ となり，$r=1$ である。

(4)　(3)のとき，$\alpha^3=\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3=-\dfrac{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}}{8}=-\dfrac{5+3\sqrt{3}}{4}$ となり，②から，

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}=\left|1+\frac{5+3\sqrt{3}}{4}\right|=\left|\frac{9+3\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{9+3\sqrt{3}}{4}$$

［解　説］

複素数平面と累乗根に関する問題です。ポイントは(3)ですが，与えられた式の意味を考えて，図形的に処理しています。

23 ［九州大］

a, b を複素数, c を純虚数でない複素数とし, 点 z が虚軸全体を動くとき, $w=\dfrac{az+b}{cz+1}$ ……①により定まる点 w の軌跡を C とする。

条件(ア)より, $z=i$ のときに $w=i$ から $i=\dfrac{ai+b}{ci+1}$ となり, $-c+i=ai+b$ ………②

また, $z=-i$ のときに $w=-i$ から $-i=\dfrac{-ai+b}{-ci+1}$ となり, $-c-i=-ai+b$ ………③

②＋③より $b=-c$ となり, ②－③より $a=1$ となるので, ①は,

$$w=\frac{z-c}{cz+1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

次に, 条件(イ)から $|w|=1$ なので, ④より $\left|\dfrac{z-c}{cz+1}\right|=1$ となり, $\dfrac{|z-c|}{|cz+1|}=1$ から,

$$|z-c|=|cz+1|\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

k を任意の実数として $z=ki$ とおくと, ⑤は $|ki-c|=|kci+1|$ となり,

$$(ki-c)(-ki-\bar{c})=(kci+1)(-k\bar{c}i+1)$$

$$k^2-k\bar{c}i+kci+|c|^2=k^2|c|^2+kci-k\bar{c}i+1,\ (|c|^2-1)k^2-(|c|^2-1)=0$$

任意の実数 k で成立することより, $|c|^2-1=0$ となり, $c\bar{c}=1$ ………⑥

また, 条件(ウ)は「$w=-1$ となる純虚数 z が存在しない」ということなので, ここで $w=-1$ としたとき, ④から $\dfrac{z-c}{cz+1}=-1$, すなわち $z-c=-cz-1$ となり,

$$(c+1)z=c-1\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

(i)　$c=-1$ のとき　⑦は不成立で, $w=-1$ を満たす純虚数 z は存在しない。

(ii)　$c\neq-1$ のとき　⑦から $z=\dfrac{c-1}{c+1}$ となり, ⑥より, $\bar{z}=\dfrac{\bar{c}-1}{\bar{c}+1}=\dfrac{\frac{1}{c}-1}{\frac{1}{c}+1}=\dfrac{1-c}{1+c}=-z$

　すると, ⑦が成立すなわち $w=-1$ を満たす純虚数 z が存在する。

(i)(ii)より, 条件(ウ)を満たす c は, $c=-1$ である。

したがって, $a=1$, $b=1$, $c=-1$ となり, ①は $w=\dfrac{z+1}{-z+1}$ である。

このとき, k を任意の実数として $z=ki$ とおくと,

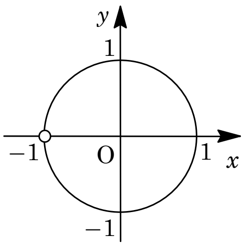
$$w=\frac{ki+1}{-ki+1}=\frac{(1+ki)^2}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}+\frac{2k}{1+k^2}i$$

そこで, x, y を実数として, $w=x+yi$ とおくと,

$$x=\frac{1-k^2}{1+k^2}\ \cdots\cdots\cdots⑧,\quad y=\frac{2k}{1+k^2}\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

k は任意の実数なので, $k=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことができ, ⑧⑨から,

$$x=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\cos 2\theta$$
$$y=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\sin 2\theta$$



よって，$w=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ となり，点 w の軌跡 C は，原点 O と中心とする半径 1 の円である。ただし，$-\pi<2\theta<\pi$ から点 -1 を除く。そして，C を図示すると，右図のようになる。

［解 説］

複素数平面上の変換についての問題です。条件(ウ)の処理の方法が難です。なお，末尾の $k=\tan\theta$ という置換えは，⑧⑨を見て設定しています。