$\boxed{5}$ ［金沢大］

座標平面において，

$$x = \sin t\,,\ \ y = \cos t - \sin t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

で表される曲線を C_1 とし，x 軸に関して C_1 と対称な曲線を C_2 とする。C_1 で囲まれる図形と C_2 で囲まれる図形の共通部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{5}$ ［金沢大］

曲線 C_1 : $x=\sin t$, $y=\cos t-\sin t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ に対して，対称性を調べるために，まず，$x=f(t)$, $y=g(t)$ とおくと，

$$f(t+\pi)=-f(t),\ g(t+\pi)=-g(t)$$

これより，C_1 の $0\leqq t\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分は原点対称になり，$0\leqq t\leqq\pi$ において，

$$f'(t)=\cos t$$

$$g'(t)=-\sin t-\cos t$$

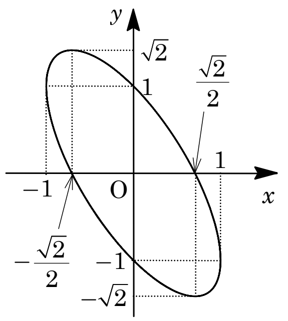
$$=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0
$g'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1

すると，x , y の増減は右上表のようになり，C_1 と x 軸との交点について，$g(t)=0$ から，

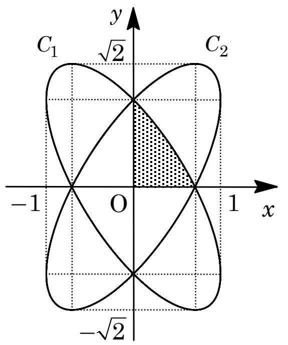
$$\cos t-\sin t=0,\ t=\frac{\pi}{4}$$

このとき，$(x,\ y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ である。



そこで，$0\leqq t\leqq\pi$ の部分を原点対称移動して $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分も合わせて描くと，C_1 の概形は右図のようになる。

さらに, x 軸に関して C_1 と対称な曲線 C_2 も合わせて描くと，右下図のようになる。そして，C_1 と C_2 で囲まれる図形の共通部分の面積 S は，対称性より，図の網点部の面積の 4 倍になるので，



$$\frac{S}{4}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t-\sin t)\cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t-\sin 2t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}$$

よって，$S=4\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ である。

［解 説］

パラメータ曲線に囲まれた部分の面積を求める頻出題です。対称性に注意すると，計算量は穏やかです。